Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Hipersuperfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Fronteira Livre

Alexandre Jesus dos Santos

São Cristóvão – SE
16 de Março de 2018

Universidade Federal de Sergipe

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Hipersuperfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Fronteira Livre

por

Alexandre Jesus dos Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão – SE
16 Março de 2018

Hipersuperfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Fronteira Livre

por

Alexandre Jesus dos Santos

Dissertação apresenta ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como parte para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Prof. Dr. Almir Rogério dos Santos UFS
(Orientador)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Hipersuperfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Fronteira Livre

por

Alexandre Jesus dos Santos

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
Orientador

Prof.ª Dr.ª Maria de Andrade Costa e Silva - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Marcio Henrique Batista da Silva - UNEAL
Segundo Examinador

São Cristóvão, 16 de Março de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Santos, Alexandre Jesus dos
S237h	Hipersuperfícies estáveis com curvatura média constante e fronteira livre / Alexandre Jesus dos Santos ; orientador Almir Rogério dos Santos. - São Cristóvão, 2018.
	79 f.
	Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2018.
	1. Geometria diferencial. 2. Superfícies (Matemática). 3. Curvas em superfícies. 4. Hipersuperfícies. I. Santos, Almir Rogério dos orient. II. Título.
	CDU 514.7

THE FUTURE IS A POT...

Resumo

Uma hipersupefície de uma variedade, ambas com fronteira não vazia, é chamada de hipersupefície com fronteira livre se é ponto crítico do funcional área restrito a todas as variações admissíveis que preservam volume. Uma variação é dita admissível se a fronteira e o interior da variedade contém as fronteiras e os inteiores das hipersupefícies da variação, respectivamente. É bem conhecido que hipersupefícies com fronteira livre possuem curvatura média constante. Neste trabalho estudamos hipersuperfíce com fronteira livre em domínios convexos limitados do espaço euclidiano. Mais especificamente, expomos com detalhes os resultados obtidos por A. Ros e E. Vergasta [19] e I. Nunes, [16]. Provamos como resultado principal que toda superfície de fronteira livre estável na bola unitária do espaço euclidiano tridimensional é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica.

Palavras-chave: Superfície, Fronteira Livre, Curvatura Média Constante, Superfície Estável.

Abstract

A hypersurface in a manifold, both with nonempty boundary, is called free boundary hypersurface if it is a critical point of the area functional restricted to all admissible variations which preserve volume. A variation is admissible if the boundary and the interior of the manifold contains the boundary and the interior of the hypersurfaces of the variation, respectively. It is well known that free boundary hypersurface has constant mean curvature. In this work we study free boundary hypersurfaces in bounded convex domains in the euclidean space. More precisely, we prove the results obtained by A. Ros and E. Vergasta [18] and I. nunes [15]. As the main result we prove that a stable free boundary surface in the unit ball of the three-dimensional euclidian space has to be either the totally geodesic disc or a spherical cap..

Keywords: Surface, Free Boundary, Constant Mean Curvature, Stable Surface.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Métricas Riemannianas e Curvaturas 4

1.2 O Teorema de Gauss-Bonnet 13

1.3 Subvariedades 14

1.4 Fórmulas de Variação 23

1.4.1 Fórmula da Primeira Varição da Área 24

1.4.2 Variação de Volume 27

1.4.3 Superfícies Estacionárias e Fórmula da Segunda Variação de Área 29

1.5 Princípio do Máximo de Hopf 37

2 Hipersuperfície Estáveis de Fronteira Livre no $\mathbb{R}^{n+1}$ **39**

2.1 A Forma do Índice 39

2.2 Estabilidade para Hipersuperfícies em Conjuntos Convexos 42

2.3 Estabilidade para Hipersuperfícies na Bola unitária 46

3 Superfícies Estáveis na Bola Unitária **57**

3.1 Demonstração do Teorema de Ros-Vergasta 57

3.2 Demonstração do Teorema de I. Nunes 63

3.3 Resultado Principal 67

Introdução

Seja uma imersão $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de uma variedade orientável de dimensão n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. É bem conhecido que a condição de ter curvatura média constante não nula, ou simplesmente CMC, é equivalente ao fato que ϕ é ponto crítico do funcional área restrito a todas as variações que preservam volume. Um importante resultado sobre tais superfícies, no caso sem fronteira, foi obtido por M. do Carmo e J. L. Barbosa [2] que é o seguinte

Teorema 0.1 (do Carmo-Barbosa, [2])**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n, compacta, orientável com fronteira vazia e $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não nula. Então ϕ é estável se, e somente se, $\phi(M)$ é a esfera canônica.*

Neste trabalho, estamos interessados em estudar imersões $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, onde M é uma variedade com fronteira, de tal modo que possuam curvatura média constante e também que o interior e a fronteira estejam contidas no interior e na fronteira de algum domínio convexo limitado $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente. Tais superfícies são chamadas de superfícies CMC com fronteira livre, intersectam a fronteira do ambiente ortogonalmente e são obtidas como pontos críticos do funcional área restrito a todas as variações admissíveis que preservam volume. Dizemos que uma variação $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de ϕ é admissível se $\Phi(intM) \subset intB$ e $\Phi(\partial M) \subset \partial B$. Daí, uma pergunta natural a se fazer é sobre a possibilidade de obter um resultado análogo ao Teorema de do Carmo-Barbosa [2] para tais imersões.

Dada uma variação admissível $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de uma imersão $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde B é um domínio convexo limitado, o funcional área é definido como

$$A(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume com respeito à variação de $M_t := \Phi(t, M)$, enquanto que o funcional volume $V(t)$ é definido por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} \Phi^* dV,$$

onde dV é o elmento de volume do $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que a imersão ϕ é *estacionária* se $A'(0) = 0$ e que é *estável* se $A''(0) \geq 0$. Portanto, surge a pergunta natural: Quais são as imersões com fronteira livre estacionárias estáveis?

Um primeiro resultado nesta direção foi obtido por A. Ros e E. Vergasta [19] em 1995. Eles responderam parcialmente esta pergunta em dimensão 3, deixando em aberto a possibilidade de existir uma imersão estacionária estável com gênero 1. Mais tarde, em 2017, I. Nunes [16] excluiu esta possibilidade utilizando uma modificação da técnica utilizada por Ros-Vergasta, resolvendo por completo em dimensão 3 este problema. O teorema é o seguinte.

Teorema 0.2 (Ros-Vergasta [19], Nunes [16]). *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola unitária e $\phi : M \longrightarrow B$ é estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

i) $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico.

ii) $\phi(M)$ é uma calota esférica.

Para hipersupefícies mínimas de dimensão arbitrária, Ros-Vergasta [19] obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 0.3 (Ros-Vergasta [19]). *Se $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola, então uma hipersupefície mínima estável é totalmente geodésica.*

Para o caso em que a superfície não é mínima, Ros-Vergasta obtiveram somente um resultado parcial. Uma hipersupefície é dita *estrelada* com respeito à um ponto do espaço ambiente se cada semi-reta com origem neste ponto intersecta a hipersupefície no máximo em um ponto.

Teorema 0.4 (Ros-Vergasta [19]). *Seja $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma bola. Se A e L são a área n-dimensional da hipersupefície e a área $(n-1)$-dimensional da fronteira, respectivamente, então uma hipersupefície estacionária estável que não é totalmente geodésica com fronteira mergulhada e $L \geq nA$ é estrelada com respeito à origem da bola.*

A extensão do Teorema 0.2 para dimensão qualquer não é imediata, visto que muitos dos resultados utilizados em sua demonstração são exclusivos de superfícies, como por exemplo, o

Teorema de Gauss-Bonnet. Usando uma técnica diferente daquela utilizada por Ros-Vergasta, G. Wang e C. Xia [21] provaram que uma imersão estacionária estável com fronteira livre na bola euclideana é uma bola totalmente geodésica ou uma calota esférica, respondendo por completo a pergunta acima e portanto obtendo um resultado análogo ao teorema de do Carmo-Barbosa, Teorema 0.1.

O objetivo deste trabalho é apresentar detalhes da demonstração dos Teoremas 0.2, 0.3 e 0.4.

Dado um domínio limitado $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e uma imersão CMC de fronteira livre em B, da fórmula da primeira variação de área, concluímos que tal imersão intersecta ortogonalmente a fronteira de B. Uma das principais ferramentas utilizadas no estudo de hipersupefície estáveis de fronteira livre é a forma do índice, que é motivada pela fórmula da segunda variação de área. A forma do índice é uma forma bilinear simétrica $\mathcal{I}$ definida no espaço de Sobolev $\mathcal{H}^1(M)$ como

$$\mathcal{I}(f,g) = \int_M \left(\langle \nabla f, \nabla g\rangle - \|\sigma\|^2 fg\right) dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N) fg ds,$$

onde σ é a segunda forma fundamental da hipersupefície e $\Pi^{\partial B}$ é a segunda forma fundamental da fronteira do domínio B com respeito ao vetor normal unitário para dentro.

Hipersupefícies CMC de fronteira livre são obtidas como pontos críticos do funcional área restrito à variações admissíveis que preservam volume. Como a primeira fórmula de variação do volume é dada por

$$V'(0) = \int_M f dM,$$

onde $f = \langle \xi, N\rangle$, ξ é o campo variacional e N é o campo normal unitário de M, então concluímos que $A''(0) \geqslant 0$ é equivalente a $\mathcal{I}(f,f) \geqslant 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{H}^1(M) : \int_M f dM = 0 \right\}$.

Este trabalho está divido em três capítulos. O primeiro é dedicado aos resultados básicos necessários para o bom entendimento das demonstrações dos teoremas principais. Definimos e expomos resultados sobre variedades e subvariedades Riemannianas. Apresentamos o Teorema de Gauss-Bonnet que é uma ferramente bastante útil no estudo de superfícies. Ainda no Capítulo 1, calculamos a primeira e a segunda fórmula de variação de área para hipersupefícies com fronteira. O Capítulo 2 é dedicado aos resultados sobre hipersuperfíce com fronteira livre em domínios convexos do $\mathbb{R}^{n+1}$ e demonstramos os Teoremas 0.3 e 0.4. Por fim, no Capítulo 3, finalizamos este trabalho demonstrando o Teorema 0.2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados básicos da geometria Riemanniana, bem como ferramentas de geometria, topologia, e análise que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Dada uma variedade diferenciável M, denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ como sendo o conjunto de todos os campos de vetores suaves em M e $C^{\infty}(M)$ o conjunto de todas as funções suaves definidas em M. Além disso, em alguns resultados usaremos a notação de Einstein que diz que índices repetidos acima e abaixo representam somas variando de 1 até a dimensão da variedade, como por exemplo,

$$a^i b_j = \sum_{1}^{n} a^i b_j.$$

Vale ressaltar que estamos assumindo os conhecimentos prévios de geometria diferenciável e variedades diferenciáveis, para mais detalhes ver [3] e [10]

1.1 Métricas Riemannianas e Curvaturas

Em geometria diferencial de superfícies podemos usar o produto interno do $\mathbb{R}^3$ restrito a cada plano tangente e, a partir daí, dá a noção de medir comprimento de vetores tangentes. Aqui temos um objeto abstrato, o que o torna diferente de geometria de superfícies, pois a variedade a priori, não está colocada em nenhum espaço. Assim, para medir em cada ponto comprimentos de vetores tangentes que variam diferencialmente, precisamos definir uma métrica, a qual chamamos de métrica Riemanniana.

Definição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável, uma* ***métrica Riemanniana*** *em M é um* *tensor suave g do tipo $(2,0)$ em M tal que para cada ponto $p \in M$, a aplicação $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g_p(u,v) := g(U,V)(p),$$

é um produto interno em T_pM, onde $U,V \in \mathcal{X}(M)$ tais que $U(p) = u$ e $V(p) = v$.

Denotaremos por (M,g) uma variedade Riemanniana munida com uma métrica g. As vezes denotaremos a métrica g simplesmente como $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Em um sistema de coordenadas $x_1,...,x_n$ denotaremos por (g_{ij}) e (g^{ij}) as componentes da métrica g e de sua inversa, respectivamente.

Teorema 1.1. *Toda variedade diferenciável Hausdorff com base enumerável admite uma métrica Riemanniana.*

Para mais detalhes sobre o teorema acima ver [4].

Conexão

Dados campos $X,Y \in \mathcal{X}(M)$, é possível mostrar que existe um único campo diferenciável $Z \in \mathcal{X}(M)$ tal que

$$Z(f) = (XY - YX)f$$

para todo $f \in C^\infty(M)$. Assim, temos a seguinte definição

Definição 1.2. *Seja M uma variedade diferenciável, a operação $[.,.] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ definida por*

$$[X,Y] := XY - YX,$$

é chamada de Colchete de Lie.

Proposição 1.1. *Seja $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ campos diferenciáveis em M e $f \in C^\infty(M)$. Então*

(1) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(anticomutatividade);*

(2) $[aX+bY,Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ *(linearidade);*

(3) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ *(identidade de Jacobi);*

(4) $[fX,gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

O colchete $[X,Y]$ pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias" de X. Para mais detalhes ver [4].

Sabemos que dado um ponto $p \in M$, podemos considerar um sistema de coordenadas $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ em torno do ponto $p = \boldsymbol{x}(x_1, ..., x_n)$. Assim, denotamos por $\dfrac{\partial}{\partial x_i} := d\boldsymbol{x}(e_i)$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base do $\mathbb{R}^n$, daí, o conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$ é uma base para o espaço tangente em cada ponto de M. Além isso, note que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,$$

pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Definição 1.3. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, definida por*

$$\nabla(X, Y) = \nabla_X Y,$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$*;*

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$*;*

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$*,*

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in C^\infty(M)$.

Dada uma variedade Riemanniana M de dimensão n e $p \in M^n$, é possível mostrar que existe um referencial ortonomal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ definido em alguma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Tal referencial é chamado de **referencial geodésico** em p.

Teorema 1.2. ***(Levi-Civita)****. Dada uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo as seguintes condições*

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *(simétrica);*

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *(Compatível com métrica).*

A conexão no teorema acima é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana. De agora em diante quando falarmos de conexão estaremos nos referindo a ela.

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização de M. Os símbolos de Christoffel são as componentes da conexão de Levi-civita definidos em U por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

onde

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right).$$

Definição 1.4. ***(Gradiente).*** *Seja $f \in C^\infty(M)$, o gradiente de f denotado por ∇_f é um campo vetorial em M que satisfaz*

$$\langle \nabla f(p), x \rangle = x(f).$$

Com $p \in M$, e $x \in T_pM$. Além disso, se $X \in \mathcal{X}(M)$ é uma extensão local de x, então

$$\langle \nabla f(p), X \rangle = X(f).$$

Proposição 1.2. *Seja $f \in C^\infty(M)$, considere $x_1, ..., x_n$ um sistema de coordenadas locais em M. Então*

$$\nabla f = g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Demonstração. Como $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$ e o sistema de coordenadas locais $x_1, ..., x_n$ nos fornece uma base $\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_1^n$ de $\mathcal{X}(M)$, então temos que

$$\nabla f = a^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Fazendo o produto interno com $\frac{\partial}{\partial x_k}$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle = a^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle = a^i g_{ki}.$$

Multiplicando a equação acima por g^{jk}, ficamos com

$$g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} = a^i g^{jk} g_{ki}.$$

Agora somando em k e observando que $g^{jk} g_{ki} = \delta_{ji}$, chegaremos que

$$g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} = a^i \delta_{ji} = a^j.$$

Trocando j por i, temos que

$$a^i = g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Logo,

$$\nabla f = g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$\square$

Na proposição acima, um caso particular quando $M = \mathbb{R}^n$ munido da métrica canônica $g_{ik} = \delta_{ik}$, tomando e^i o i-ésimo campo canônico em $\mathbb{R}^n$, com $i = 1, ..., n$, temos que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}e^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Definição 1.5. ***(Divergente).*** *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo fixado, considere a aplicação linear $\varphi : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por $\varphi(Y) = \nabla_Y X$. O divergente do campo X com respeito à métrica g é dado por*

$$div(X) = tr(\varphi),$$

onde $tr(\varphi)$ significa o traço da aplicação φ com respeito à métrica g.

Considere uma base $\beta = \{e_i\}_{i=1}^n$, então $\nabla_{e_i}X = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$. Assim, fazendo interno com e_k obtemos

$$\langle \nabla_{e_i}X, e_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}g_{jk}.$$

Em que $g_{ik} = \langle e_i, e_k\rangle$. Agora multiplicando por g^{ik}, somando em j, chegaremos que

$$a_{ik} = g^{ik}\langle \nabla_{e_i}X, e_k\rangle$$

Assim temos uma expressão para o divergente

$$divX = g^{ik}\langle \nabla_{e_i}X, e_k\rangle. \tag{1.1}$$

Note que se β for ortonormal, então ficamos

$$divX = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle.$$

Considerando um sistema de coordenadas locais $x_1,..,x_n$ em M, temos que $\beta = \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_1^n$ forma uma base para $\mathcal{X}(M)$, assim o campo $X = \sum_{i=j}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Com isso

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j,l=1}^n b_j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial b_l}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n b_j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}.
\end{aligned}$$

Trocamos j por l na primeira parte da última igualdade. Por outro lado, temos que $\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n a_{il} \frac{\partial}{\partial x_l}$ e que $div_g X = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Logo, fazendo $i = l$ na última igualdade da equação acima obtemos

$$div_g X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n b_j \Gamma_{ij}^i \right).$$

Na notação de Einstein fica

$$div_g X = \frac{\partial b^i}{\partial x_i} + b^i \Gamma_{ij}^i.$$

Definição 1.6. ***(Laplaciano)***. *Seja $f \in \mathcal{F}(M)$, o Laplaciano de f é a aplicação $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f := div(\nabla f).$$

Além disso, para quaisquer $f, h \in C^\infty(M)$ vale as seguintes propriedades

i. $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$;

ii. $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle$.

Proposição 1.3. *Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\beta = \{e_i\}_1^n$ um referencial ortogonal em um aberto $U \subset M$. Então em U vale*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i} e_i(f).$$

Demonstração. Como $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i$, pela definição do laplaciano temos

$$\Delta f = div(\nabla f) = div\left(\sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) + \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f\rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) + \nabla_{e_i} e_i(f).$$

$\square$

Note que pela expressão acima no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, então vale

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)), \tag{1.2}$$

onde e_i é o i-ésimo campo canônico do $\mathbb{R}^n$. Esta mesma equação vale para qualquer ponto de uma variedade M se o referencial for geodésico nesse ponto.

Teorema 1.3. ***(Teorema da Divergência)*** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana orientada compacta. Se X é um campo vetorial, então*

$$\int_M divX dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta\rangle\, ds. \tag{1.3}$$

Em que η é o vetor unitário normal para fora da fronteira ∂M.

Corolário 1.4. *Seja (M, g) uma variedade Reimanniana orientada compacta. Se s é um $(r, k)-$tensor então*

i)

$$\int_M f(divX)dM = -\int_M \langle \nabla f, X\rangle\, dM + \int_{\partial M} f\,\langle X, \eta\rangle\, ds, \tag{1.4}$$

onde η é o vetor exterior normal na ∂M.

ii) 1^a *(identidade de Green).*

$$\int_M f\Delta h dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla h\rangle\, dM + \int_{\partial M} f\frac{\partial h}{\partial \eta} ds. \tag{1.5}$$

Em que $f, h \in C^\infty(M)$.

Cuvatura

Definição 1.7. *O tensor curvatura de* (M^n, g) *é um tensor do tipo* $(3,1)$ *definida por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

É possível mostrar que $R(X,Y)Z(p)$ só depende de $X(p), Y(p), Z(p)$.

Observação 1.1. *Note que se* $M = \mathbf{R}^n$, *então* $R(X,Y)Z = 0$ *para todo* $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. *Assim, sendo* $Z = (z_1, ..., z_n)$ *as componentes do campo* Z *com relação as coordenadas naturais do* $\mathbb{R}^n$, *então*

$$\nabla_X Z = (X(z_1), ..., X(z_n)).$$

Daí

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y(X(z_1), ..., Y(X(z_n)).$$

E

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ((XY - YX)(z_1), ..., (XY - YX)(z_n)).$$

Logo, temos que

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = 0.$$

Com a observação acima, podemos pensar em R como uma maneira de medir o quanto a variedade M deixa de ser euclidiana.

Definição 1.8. ***(Tensor covariante)*** *Um tensor de ordem* r, *ou do tipo* $(r, 0)$, *é uma aplicação* $T : \mathcal{X}(M) \times ... \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ *r-linear, tal que*

$$T(X_1, ..., fX_i, ..., X_r) = fT(X_1, ..., x_r),$$

para todo $X_i \in \mathcal{X}(M)$, *com* $i = 1, ..., r$, *e toda* $f \in C^\infty(M)$.

Também é possível mostrar que $T(X_1, ..., X_r)(p)$ só depende dos vetores $X_i(p)$, $i = 1, ..., r$. Podemos transformar o tensor curvatura R em um tensor covariante, também chamado de R, tomando o produto escalar por algum campo. Assim $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M)$ é a operação

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W).$$

Também denotado como $R(X,Y,Z,W) = (X,Y,Z,W)$, dizemos que R é um tensor do tipo $(4,0)$.

Suas componentes em coordenadas são dadas por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

e

$$R_{ijks} := R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = R^l_{ijk}g_{ls}.$$

Propriedades 1.1. *Tem-se as seguintes propriedades para o tensor curvatura*

i) $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0$ ***(Primeira identidade de Bianchi);***

ii) $R_{ijks} = -R_{jiks} = R_{ijsk} = R_{ksij}$.

Se fixarmos $p \in M$, temos $R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, que é chamado de tensor curvatura de Rieman em p. A partir desse tensor, podemos definir curvaturas.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, dado $p \in M$, seja π uma subespaço de T_pM fixado com $\dim \pi = 2$ e considere uma base $\{x, y\}$ de π. Daí, temos a seguinte proposição

Proposição 1.4. $\dfrac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{||x||^2||y||^2 - \langle x, y\rangle}$ *não depende da base* $\{x, y\}$ *de* π.

Definimos a curvatura seccional de π por

$$k(\pi) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{||x||^2||y||^2 - \langle x, y\rangle}.$$

Note que se $\{x, y\}$ for uma base ortonormal, então $k(\pi) = \langle R(x,y)x, y\rangle$.

Definição 1.9. ***(Curvatura de Ricci, e curvatura escalar)*** *O tensor de Ricci é um tensor do tipo* $(2,0)$*, definido por*

$$Ric(x, y) := tr(z \to R(x, z)y),$$

com componentes $R_{ij} = R^k_{ikl} = g^{kl}R_{ikjl}$*; e a curvatura escalar é definida como*

$$R_g := g^{ij}R_{ij}.$$

1.2 O Teorema de Gauss-Bonnet

Um dos Teoremas importantes em Geometria Diferencial é o Teorema de Gauss-Bonnet, que é um resultado sobre superfícies que relaciona geometria com topologia. Nesta seção, não vamos demonstrá-lo pois, não é objetivo deste trabalho, no entanto, vamos apresentá-lo. A topologia do qual falaremos, é com respeito a característica de Euler, considerando o número de componentes conexas ligadas à fronteira da superfície. Para mais detalhes ver [3] e [11].

Definição 1.10. *Uma triangulação de uma região R é uma família de triângulos $\tau = \{T_i\}_{i=1}^n$, tal que*

(1) $R = \bigcup_{i=1}^n T_i$;

(2) Se $T_i \bigcap T_j \neq \emptyset$, *com* $i \neq j$ *então,* $T_i \bigcap T_j$ *é um vértice ou uma aresta comum a* T_i *e* T_j.

Vamos denotar por V, A e F como sendo o número de vértices, arestas e faces de uma triangulação τ sobre uma região R, respectivamente.

Dada uma região sobre uma superfície, é possível mostrar que tal região admite uma triangulação.

Definição 1.11. *Seja Σ uma superfície, definimos a característica de Euler como*

$$\mathcal{X}(\Sigma) = V - A + F.$$

Dada Σ uma superfície compacta com fronteira, seja r o número de componentes conexas de $\partial\Sigma$. A relação entre o gênero g da superfície Σ, a característica de Euler e r é dada pela relação

$$\mathcal{X}(\Sigma) = 2 - 2g + r.$$

Teorema 1.5. ***(Teorema de Gauss-Bonnet)*** *Seja Σ uma variedade Riemannian compacta orientável e sejam $C_1, ..., C_n$ as curvas fechadas, simples e regulares por partes que forma a fronteira $\partial\Sigma$ de Σ . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_i, ..., \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas $C_1, ..., C_n$. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} K_g(s)ds + \int_{\Sigma} K d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi\mathcal{X}(\Sigma),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i, a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os acros de C_i e K, σ e ds são a curvatura de Gauss, o elemento de volume de Σ e o elemento de volume de $\partial\Sigma$, respectivamente.

1.3 Subvariedades

Sejam M^n e $\overline{M}^{n+m}$ variedades diferenciáveis, uma aplicação diferenciável $\phi : M \to \overline{M}$ é uma imersão se $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Assim, se ϕ é uma imersão, segue do Teorema da Função Inversa, que para cada $p \in M$ exite uma vizinhança V de p em M, tal que $\phi : V \to \overline{M}$ é um mergulho. Daí temos que $\phi(V)$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Como $\phi : V \to \phi(V)$ é um difeomorfismo local, temos que para todo $p \in M$ a aplicação $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\overline{M}$ é um isomorfismo. Desta forma, podemos identificar V com $\phi(V)$ e campos $X \in \mathcal{X}(M)$ com $d\phi(X) \in \mathcal{X}(\phi(V))$. Além disso, se $(\overline{M}, g)$ é uma variedade Riemanniana, então a métrica g de $\overline{M}$ induz uma métrica ϕ^*g em M, e nesse caso temos uma imersão isométrica. Daqui por diante iremos considerar que $M \subset \overline{M}$.

Note que para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ induz uma decomposição de $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, dado $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrever

$$v = v^\top + v^\perp,$$

onde $v^\top \in T_pM$ e $v^\perp \in (T_pM)^\perp$. Dado um aberto $U \subset M$ e $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ em que $\mathcal{X}(U)$ é o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em U, considere extensões locais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y, respectivamente. Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. É bem conhecido que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top.$$

Definição 1.12. *A segunda forma fundamental de M^n em $\overline{M}^{n+m}$ é a aplicação bilinear $\sigma : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}^\perp(M)$, definida por*

$$\sigma(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, \tag{1.6}$$

onde $\mathcal{X}^\perp(M) = \{X \in \mathcal{X}(\overline{M});\ X(p) \in (T_pM)^\perp,\ para\ todo\ p \in M\}$.

A aplicação definida acima é uma forma bilinear simétrica. A demonstração pode ser vista em [4]. Pode-se mostrar também que σ independe das extensões locais de X e Y. Além disso, temos que o valor de $\sigma(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, defina a aplicação linear $S_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$S_\eta(v) = -\left(\overline{\nabla}_v N\right)^{\top},$$

onde $(.)^{\top}$ denota a componente tangente e N é uma extensão local do vetor η normal a M. Note que a aplicação S_η satisfaz

$$\langle S_\eta(v), u\rangle = \langle \sigma(v,u), \eta\rangle,$$

para todo $v, u \in T_pM$. Além disso, como σ é simétrica, segue que a aplicação S_η é auto-adjunta.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Daí, considere N como sendo uma extensão local de η a um campo normal em M. Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e defina a aplicação normal de Gauss $\mathcal{G} : M \to \mathbb{S}^n$, transladando a origem do campo N para a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e fazendo

$$\mathcal{G}(p) = \text{ponto final do translado de } \ N(q).$$

Note também que para cada $p \in M$ o vetor $N(p)$ é normal tanto ao espaço T_pM quanto ao espaço tangente $T_{\mathcal{G}(p)}\mathbb{S}^n$, daí temos que estes espaços são paralelos e desta forma podem ser vistos como sendo o mesmo espaço vetorial. Sendo assim, considere uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, temos que $d\mathcal{G}_p : T_pM \to T_pM$ é dada por

$$d\mathcal{G}_q(v) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} (N \circ \alpha(t)) = \overline{\nabla}_v N.$$

Desde que $\langle N, N\rangle = 1$ temos que $\left\langle \overline{\nabla}_v N, N\right\rangle = 0$, daí, segue que $(\overline{\nabla}_v N)^{\perp} = 0$. Portanto, temos que

$$d\mathcal{G}_p(v) = (\overline{\nabla}_v N)^{\top} = -S_\eta(v).$$

Considere o caso particular em que a imersão tem codimensão 1, ou seja, $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$, e neste caso tal subvariedade é chamada de hipersuperfície. Desta forma, dado $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ com $\|\eta\| = 1$ e usando o fato de que S_η é um operador linear auto-adjunto, segue do Teorema Espectral que existe uma base ortonormal de autovetores $\beta = \{e_i\}_{i=1}^n$ de T_pM, ou seja, $S_\eta(e_i) = k_i e_i$ onde $k_i \in \mathbb{R}$. Os autovalores de S_η são chamados de curvaturas principais e seus autovetores de direções principais. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma(e_i, e_j) &= \langle \sigma(e_i, e_j), \eta \rangle \eta \\
&= \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle \eta \\
&= k_i \delta^{ij} \eta,
\end{aligned}$$

e, consequentemente, temos que

$$\|\sigma\|^2 = tr(S_\eta (S_\eta)^t) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2,$$

onde $(S_\eta)^t$ é a matriz transposta com respeito a aplicação S_η.

Definição 1.13. *Uma imersão $\phi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se $\sigma(v, u) = 0$ para todo $v, u \in T_pM$. Se for geodésica em todo $p \in M$, ou seja, $\sigma \equiv 0$, neste caso dizemos que a imersão é totalmente geodésica.*

Proposição 1.5. *Uma imersão $\phi : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica α de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em $\phi(p)$.*

Definição 1.14. *Dizemos que uma imersão $\phi : M \to \overline{M}$ é mínima se o traço de S_η é identicamente nulo para todo $p \in M$, onde $\eta \in (T_pM)^\perp$.*

Seja $\{e_i\}_1^n$ um referencial ortonormal em torno de um ponto $p \in M$, isto é, existem uma vizinhança V de p em M tal que para todo ponto $q \in V$ tem-se que o conjunto $\{e_i(q)\}_1^n$ é uma base de T_qM. Agora, defina o vetor normal $\mathbf{H}$ por

$$n\mathbf{H} = \sigma(e_i, e_j).$$

É possível mostrar que $\mathbf{H}$ não depende do referencial $\{e_i\}_1^n$ escolhido. Chamamos $\mathbf{H}$ de **vetor curvatura média** de ϕ. Note que a imersão ϕ é mínima se, e somente se, $\mathbf{H}(p) = 0$.

Lema 1.1. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Se N é um campo unitário normal a M, então*

(i) $\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N \right\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle,$

(ii) $nH = \sum_{i} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle,$

onde $\{e_i\}$ é um referencial local ortonormal. Além disso, se H é constante e $\{e_i\}$ é um referencial geodésico, então no ponto p tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle = 0$$

para todo $k = 1, ..., n$.

Demonstração. Para o item (i) considere a aplicação $S_N(u) = -\overline{\nabla}_u N$. Note que

$$S_N(e_i) = \sum_{i,j} a_{ij} e_j,$$

onde $a_{ij} = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle$. Assim, como a base é ortonormal

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} a_{ii} = \sum_{i,j} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle . \tag{1.7}$$

Desde que $\langle N, e_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, .., n$, temos que $\left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_j} e_i \right\rangle$. Como S_N é uma aplicação autoadjunta, segue que

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle^2 .$$

O que mostrar a primeira igualdade de (i).

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle \langle e_j, e_k \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \right)^2 . \end{aligned}$$

Com isso, mostramos a segunda igualdade de (i).

Para mostrarmos a terceira igualdade basta derivar a igualdade $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = 0$ e obter que

$$0 = e_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle ,$$

ou seja,

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N, N\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle. \tag{1.8}$$

Para mostrar (ii), basta lembrar que

$$nH = tr(S_N) = \sum_i a_{ii}$$

e aplicar as identidades anteriores.

Para mostrar a segunda parte, note que agora o referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ é geodésico em p. Sabemos que

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, N\right\rangle = -\left\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle.$$

Derivando , obtemos que

$$\begin{aligned} e_i\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, N\right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}e_k, N\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle \\ &= -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle - \left\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle. \end{aligned}$$

Do fato que $\left(\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right)^\top = \nabla_{e_i}e_k = 0$ em p, já que o referencial é geodésico e usando o fato de que $\overline{\nabla}_{e_i}N \in T_pM$, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle &= \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right)^\top + \left(\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right)^\perp, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right)^\perp, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, em p, tem-se que

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}e_k, N\right\rangle = -\left\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle. \tag{1.9}$$

Como o espaço ambiente é o $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_i}e_k = \overline{\nabla}_{e_k}e_i \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_k}e_i = \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i}e_i.$$

Assim, substituindo em (1.9), obtemos

$$\left\langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_k}e_i, N\right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i}e_i, N\right\rangle. \tag{1.10}$$

Daí, em p, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N \rangle = - \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right), N \right\rangle. \tag{1.11}$$

Além disso, temos que $nH = tr(S_N)$ e o referencial é geodésico, portanto, em p vale

$$nH = \sum_{i=1}^{n} \langle S_N(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle. \tag{1.12}$$

Como H é constante, derivando (1.12), obtemos

$$0 = \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right), N \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_{e_k} N \right\rangle.$$

Assim, usando a expressão acima em (1.11), concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle e_k, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i, \overline{\nabla}_{e_k} N \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left((\overline{\nabla}_{e_i} e_i)^{\top} + (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)^{\perp} \right), \overline{\nabla}_{e_k} N \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle (\overline{\nabla}_{e_i} e_i)^{\perp}, \overline{\nabla}_{e_k} N \right\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos que o referencial é geodésico em p.

□

Proposição 1.6. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então*

$$\Delta f + \|\sigma\|^2 f = 0; \tag{1.13}$$
$$\Delta h + \|\sigma\|^2 h = -nH, \tag{1.14}$$

onde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f = \langle N, a \rangle$ e $h = \langle N, \phi \rangle$.

Demonstração. Primeiro provaremos (1.13). Assim, fixe um ponto $p \in M$, tome um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em torno de p e seja $N \in (\mathcal{X}(M))^{\perp}$. Daí, podemos expressar a da seguinte forma

$$a = \sum_{j=1}^{n} \langle a, e_j \rangle e_j + \langle a, N \rangle N. \tag{1.15}$$

Como $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = 0$, pois N é unitário e $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0$ pelo fato do referencial ser geodésico, temos por (1.2) que o Laplaciano de $\langle N, a \rangle$ é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i \langle N, a \rangle &= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, a \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, a \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, \sum_{j=1}^{n} \langle a, e_j \rangle e_j + \langle a, N \rangle N \right\rangle \\
&= \sum_{j}^{n} \left(\langle a, e_j \rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \right) + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \langle a, N \rangle .
\end{aligned}$$

Segue da prova do Lema 1.1 que

$$\Delta f = -f ||\sigma||^2.$$

Para (1.14), considere um referencial geodésico $\{e_i\}_1^n$ em p, como ϕ é o vetor posição, temos que $\overline{\nabla}_{e_i} \phi = e_i$, além disso, podemos expressar ϕ da seguinte forma

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \langle \phi, e_j \rangle e_j + \langle \phi, N \rangle N. \tag{1.16}$$

Novamente por (1.2), o Laplaciano de h é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \sum_{i=1}^{n} e_i e_i \langle \phi, N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, N \right\rangle + \left\langle \phi, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\langle e_i, N \rangle + \left\langle \phi, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle \phi, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle + \left\langle \phi, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} e_i N \right\rangle \right)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle + \left\langle \phi, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} e_i N \right\rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle \phi, e_j \rangle e_j + \langle \phi, N \rangle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi, e_j \rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle e_j, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle \langle \phi, N \rangle .
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

Assim, substituindo (1.12) e usando o Lema (1.1) em (1.17), obtemos

$$\Delta h = -nH - \|\sigma\|^2 h.$$

$\square$

Proposição 1.7. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. Então*

$$\Delta g + \|\sigma\|^2 g \quad = \quad 0, \tag{1.19}$$

onde $g = \langle \phi \times N, N(p_0) \rangle$ e $p_0 \in M$ é um ponto fixado. Além disso, se o vetor normal ν a fronteira ∂M é uma direção principal de ϕ e $\phi = \nu$ em ∂M, então

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = g, \tag{1.20}$$

em ∂M.

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{e_i\}_i^n$ uma base definida em p que diagonaliza σ. Daí, temos que $\overline{\nabla}_{e_i} N = -\lambda e_i$. Extenda a base $\{e_i\}$ para um referencial geodésico $\{E_i\}_i^n$ em p. Por definição o Laplaciano de $g = \langle \phi \times N, N(p_0) \rangle$ é dada por

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{n} E_i E_i(p). \tag{1.21}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
E_i(g) &= E_i \left(\langle \phi(p) \times N(p), N(p_0) \rangle \right) \\
&= \left(\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} \phi(p) \times N(p), N(p_0) \right\rangle + \left\langle \phi(p) \times \overline{\nabla}_{E_i} N(p), N(p_0) \right\rangle \right) \\
&= \left\langle E_i(p) \times N(p) + \phi(p) \times \overline{\nabla}_{E_i} N(p), N_0 \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Daí, em p, temos que

$$\begin{aligned}
E_iE_i(g) &= E_i\left(\left\langle E_i \times N + \phi \times \overline{\nabla}_{E_i}N, N_0\right\rangle\right)\\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i \times N + E_i \times \overline{\nabla}_{E_i}N + \overline{\nabla}_{E_i}\phi \times \overline{\nabla}_{E_i}N + \phi \times \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N, N(p_0)\right\rangle\\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i \times N - 2\lambda E_i \times E_i + \phi \times \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N, N(p_0)\right\rangle\\
&= \left\langle \phi \times \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N, N(p_0)\right\rangle\\
&= \left\langle N(p_0) \times \phi, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N\right\rangle. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Agora faça

$$V = N(p_0) \times \phi = \sum_{j=1}^{n} v_jE_j + \overline{g}N. \qquad (1.23)$$

Substituindo em (1.22) temos que

$$\begin{aligned}
E_iE_i(g) &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} v_jE_j + \overline{g}N, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N(p)\right\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N(p)\rangle + \overline{g}\langle N, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N\rangle.
\end{aligned}$$

Daí, substituindo a expressão acima em (1.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N(p)\rangle + \overline{g}\langle N, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N\rangle\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j\left(\sum_{i=1}^{n}\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N(p)\rangle\right) + \overline{g}\sum_{i=1}^{n}\langle N, \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{E_i}N\rangle.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1 segue que

$$\Delta g = -\overline{g}\|\sigma\|^2.$$

Note que de (1.23) temos que

$$\overline{g} = \langle V, N(p)\rangle = \langle N(p_0) \times \phi(p), N\rangle = \langle \phi(p) \times N(p), N(p_0)\rangle = g.$$

Logo,

$$\Delta g + g\|\sigma\|^2 = 0.$$

Agora vamos mostrar a segunda parte. Como ν é uma direção principal de ϕ, temos que

$\overline{\nabla}_\nu N = \lambda\nu$. Além disso, desde que $\phi = \nu$ na fronteira ∂M segue que $\phi \times \nu = 0$. Daí, do fato que

$$\langle \nabla g, \nu \rangle = \nu(g) = \frac{\partial g}{\partial \nu},$$

temos em ∂M que

$$\begin{aligned} \nu(g) &= \nu\langle \phi \times N(p), N(p_0)\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_\nu \phi \times N(p) + \phi \times \overline{\nabla}_\nu N(p), N(p_0)\rangle \\ &= \langle \nu \times N(p) + \phi \times \lambda\nu, N(p_0)\rangle \\ &= \langle \phi \times N(p), N(p_0)\rangle \\ &= g. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = g$$

em ∂M. □

1.4 Fórmulas de Variação

Nesta seção mostraremos a fórmula da variação de volume, primeira e segunda fórmulas da variação de área. Para a fórmula da Primeira Variação faremos o caso geral, considerando a imersão $\phi : M^n \to \overline{M}^m$ em que M e $\overline{M}$ são uma variedade Riemanniana compacta orientada com $n < m$. Antes faremos algumas considerações, começando com o seguinte Lema:

Lema 1.2. *Dada g_t uma família a um parâmetro de métricas, temos que o elemento de volume evolui como*

$$\frac{\partial}{\partial t} d\nu_g = \frac{1}{2} tr(h) d\nu_g,$$

onde $h = \dfrac{\partial g_t}{\partial t}$.

Demonstração. Em coordenadas temos que

$$d\nu_g = \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial t} d\nu_g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} \log \det(g_t)_{ij}\right) \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Lembrando que o determinante de uma matriz é dado por

$$\det(g_t)_{ij} = \sum_{\sigma} sign(\sigma) A_{1\sigma(1)}...A_{n\sigma(n)},$$

onde a soma é sobre todas as permutações de $1, ..., n$. Se $A(t)$ só depende do parâmetro t, derivando $\det A$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \det A = \sum_{i,j=1} \frac{\partial}{\partial t} A_{ij} \sum_{\sigma:\sigma(i)=j} sign(\sigma) A_{1\sigma(1)}...\widehat{A_{i\sigma(1)}}...A_{n\sigma(n)},$$

onde $\widehat{A_{i\sigma(1)}}$ significa que este fator é omitido, e o segundo somatório é sobre todas as permutações σ tais que $\sigma(i) = j$. Agora da Regra de Cramer temos

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{\sigma:\sigma(i)=j} sign(\sigma) A_{1\sigma(1)}...\widehat{A_{i\sigma(1)}}...A_{n\sigma(n)}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \det A = \frac{1}{\det A} \frac{\partial}{\partial t} \det A = tr(h).$$

$\square$

1.4.1 Fórmula da Primeira Varição da Área

Seja (M^m, g) uma variedade Reimanniana de dimensão m. Considere $\varepsilon > 0$ e uma variação $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \to \overline{M}^m$ de uma variedade imersa $\phi : M^n \to \overline{M}^m$, com $n < m$. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ defina $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$, $M_t = \Phi_t(M)$ e dM_t o elemento de volume dado por

$$dM_t = \sqrt{\det(g_t)_{ij}} dx$$

onde $g_t = \Phi_t^* g$ é a métrica em M dada pelo **pullback** da métrica g em $\overline{M}$ por Φ_t. Denote por $(g_t)^{ij}$ como sendo a inversa de $(g_t)_{ij}$, e por abuso de notação diremos que $g_0 = g$. Assim definimos o funcional área como

$$A(t) = \int_M dM_t, \tag{1.24}$$

e o funcional volume por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} \Phi^* dV, \tag{1.25}$$

onde dV é o elemento de volume de $\overline{M}$.

Denote por

$$A = \int_M dM$$

o volume de M.

Agora faremos as últimas considerações para podermos enunciar e demonstrar as fórmulas de variação. Note que para $\varepsilon > 0$ suficiente pequeno, $(-\epsilon, \epsilon) \times M$ é uma variedade diferencial de dimensão $n+1$. Assim considerando um sistema de coordenadas locais $x_1, ..., x_n, t$ numa vizinhança p de $V \subset M \times (-\epsilon, \epsilon)$, obtemos uma base de $T_p\left(M \times (-\epsilon, \epsilon)\right)$

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x_m}(p), \frac{\partial}{\partial t}(p) \right\};$$

no qual induzem campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}$ ao longo da variação Φ, nos quais $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ para $i = 1, ..., n$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, satisfazendo

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right] = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] = 0, \tag{1.26}$$

pois $d\Phi\left[X, Y\right] = \left[d\Phi(X), d\Phi(Y)\right]$. Além disso, $\beta' = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q) \right\}$ é uma base de $T_q M_t$ para todo $q \in \Phi(V)$.

Teorema 1.6. ***(Primeira variação de Área)*** *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^m$ uma subvariedade imersa com vetor curvatura média $\boldsymbol{H}_M$. Se $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \overline{M}^m$ é uma varição de ϕ, então*

$$A'(0) = -\int_M nH \left\langle \xi, N \right\rangle + \int_{\partial M} \left\langle \xi, \nu \right\rangle ds \tag{1.27}$$

onde $\xi = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=0}$ e ν é o vetor exterior normal al ongo de ∂M.

Demonstração. Considerando o que já foi feito anteriormente, faça $X_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$, no qual por abuso de notação escreveremos $X_0 = \xi$. Notemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_t)_{ij} = X_t(\Phi_t^*(g)_{ij}) = X_t\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{X_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \overline{\nabla}_{X_t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{1.28}$$

Usando o fato de que a conexão é compatível com a métrica e (1.26), segue que

$$X_t(g_t)_{ij} = \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t\right), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t\right) \right\rangle. \tag{1.29}$$

Assim

$$A'(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} dM_t.$$

Pelo Lema 1.2, sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} dM_t = \frac{1}{2} tr\left(\frac{\partial g_t}{\partial t}\right) dM_t, \tag{1.30}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} dM_t &= \frac{1}{2}(g_t)^{ij}\left(\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle\right) dM_t \\ &= (g_t)^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle dM_t, \end{aligned} \tag{1.31}$$

já que g_t^{-1} é simétrica. Agora escrevendo $X_t = X_t^{\top} + X_t^{\perp}$, onde $X_t^{\top}$ e $X_t^{\perp}$ são as componentes tangente e normal, respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} dM_t &= g_t^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \left(X_t^{\top} + X^{\perp}\right), \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle dM_t \\ &= g_t^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^{\top}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle dM_t + g_t^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle dM_t \\ &= div X_t^{\top} dM_t + div X_t^{\perp} dM_t. \end{aligned}$$

Observe que estamos fazendo abuso da notação, visto que o divergente está definido para campos tangentes, no entanto, para simplificar nossos cálculos iremos considerar

$$div X_t^{\perp} = g_t^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle. \tag{1.32}$$

Portanto

$$A'(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t} dM_t = \int_M div X_t^{\top} dM_t + \int_M div X_t^{\perp} dM_t \tag{1.33}$$

Note que, como $X_t^{\perp}$ é um campo normal, então $\left\langle X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle = 0$ para todo $j = 1, ..., m$, o que implica que para cada $i = 1, ..., m$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\left\langle X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^{\top}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle X_t^{\perp}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\rangle = 0.$$

Logo,

$$g_t{}^{ij}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle = -g_t^{ij}\left\langle X_t^{\perp}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\rangle. \tag{1.34}$$

Agora usando a definição da segunda forma fundamental σ_{M_t} de M_t, obtemos que

$$\begin{aligned} -(g_t)^{ij}\left\langle X_t^{\perp}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\rangle &= -(g_t)^{ij}\left\langle X_t^{\perp}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^{\top} + \sigma_{M_t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle X_t^{\perp}, (g_t)^{ij}\sigma_{M_t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como o vetor curvatura média $\mathbf{H}_t$ em M_t é dada por

$$\mathbf{H}_{M_t} = (g_t)^{ij}\sigma_{M_t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right),$$

segue que

$$\mathbf{div} X_t^{\perp} = -\left\langle X_t^{\perp}, \mathbf{H}_{M_t}\right\rangle. \tag{1.35}$$

Substituindo (1.35) em (1.33) e aplicando em $t = 0$, obtemos

$$A'(0) = \int_M div \xi^{\top} dM - \int_M \left\langle \xi^{\perp}, \mathbf{H}_M\right\rangle dM.$$

Do Teorema da Divergência 1.3, obtemos

$$A'(0) = -\int_M \left\langle \xi^{\perp}, \mathbf{H}_M\right\rangle dM + \int_{\partial M}\left\langle \xi^{\top}, \nu\right\rangle ds,$$

onde ν é o vetor exterior normal ao longo de ∂M. Note que estamos denotando $X_0^{\top} = \xi^{\top}$, $X_0^{\perp} = \xi^{\perp}$, $\mathbf{H}_M = \mathbf{H}_{M_0}$ e $\sigma_M = \sigma_{M_0}$, onde $\mathbf{H}_M = nHN$ e σ_M é o vetor curvatura de média e a segunda forma fundamental de M, respectivamente. Para chegarmos na expressão (1.27), basta notar que $\langle \xi, \mathbf{H}_M\rangle = \langle \xi^{\top}, \mathbf{H}_M\rangle$ e $\langle \xi, \nu\rangle = \langle \xi^{\perp}, \nu\rangle$, pois $\xi = \xi^{\top} + \xi^{\perp}$. □

1.4.2 Variação de Volume

Para o próximo cálculo vamos considerar o caso onde $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Lembre-se que o volume $V(t)$ é definido como

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} \Phi^* dV,$$

onde dV é o elemento de volume canônico em $\mathbb{R}^{n+1}$. Daí, pelo Teorema da Divergência 1.3, o funcional volume é igual a

$$V(t) = \frac{1}{n+1}\int_M \langle \Phi, N(t)\rangle dM_t. \tag{1.36}$$

Proposição 1.8. *A primeira variação do volume $V(t)$ é dada por*

$$V'(0) = \int_M \langle \xi, N\rangle dM, \tag{1.37}$$

onde ξ é o campo variacional.

Dizemos que a variação $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n+1}$ preserva volume se $V(t) = V(0)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Lema 1.3. *Seja $\phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e $f \in C^\infty(M)$ tal que $\int_M f dM = 0$. Então existe uma variação Φ que preserva volume tal que seu campo variacional é dado por $\xi = fN$.*

Demonstração. Seja $g \in C^\infty(M)$ tal que $\int_M g dM \neq 0$. Denote por $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ onde $\varepsilon > 0$ e considere a variação $\Phi : M \times I \times I \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$\Phi(p, t, s) = \phi(p) + (tf(p) + sg(p))N(p),$$

onde N é a normal de M.

De (1.36) temos que

$$\begin{aligned} V(t,s) &= \frac{1}{n+1}\int_M \langle \Phi, N\rangle dM_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_M \langle \phi + (tf + sg)N, N\rangle dM_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_M (\langle \phi, N\rangle + tf + sg) dM_{t,s}. \end{aligned}$$

Como queremos que a varição preserve volume, devemos ter

$$V(t,s) = cte.$$

Daí, calculando as derivadas parciais de $V(t,s)$ temos

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,s) = \frac{1}{n+1}\left[\int_M f dM_{t,s} + \int_M tf \frac{\partial}{\partial t} dM_{t,s}\right]$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t,s) = \frac{1}{n+1}\left[\int_M g dM_{t,s} + \int_M sg\frac{\partial}{\partial s}dM_{t,s}\right].$$

Aplicando em $t = s = 0$, usando a hipótese de que f tem média zero em M obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = \frac{1}{n+1}\int_M g dM \neq 0. \tag{1.38}$$

Assim, desde que $V(t,s)$ é de classe C^∞, pelo Teorema da Função Implícita existe $\varphi(t)$ suave definida em uma vizinhança de $t = 0$ com $\varphi(0) = 0$, tal que

$$V(t) := V(t, \varphi(t)) = cte. \tag{1.39}$$

Considere

$$\phi_t(p) = \Phi(p, t, \varphi(t)) = \phi(p) + tfN + \varphi(t)gN. \tag{1.40}$$

Pelo que foi feito acima, isto é uma variação que preserva volume.

De (1.39) temos que

$$0 = V'(t,\varphi(t))\big|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial t}(0) + \varphi'(0)\frac{\partial V}{\partial s}(0) = \frac{\partial V}{\partial t}(0) - \varphi'(0)\frac{1}{n+1}\int_M g dM.$$

Assim, de (1.38) segue

$$\varphi'(0) = 0.$$

Logo, em (1.40) obtemos

$$\xi(p) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{t=0} = fN + \varphi'(0)gN = fN.$$

□

Note que considerando o caso acima na Proposição 1.8, temos que

$$V'(0) = \int_M \langle \xi, N\rangle dM = \int_M f dM = 0.$$

1.4.3 Superfícies Estacionárias e Fórmula da Segunda Variação de Área

Nesta seção vamos definir superfícies estacionárias e encontrar a fórmula da segunda variação de área para uma hipersuperfície M em um conjunto convexo $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo a condição $\partial M \subset \partial B$ e int $M \subset$ int B. Seja $\Pi^{\partial B}(X,Y) = \left\langle -\overline{\nabla}_X \eta, Y\right\rangle$ a segunda forma fundamental da fronteira de B com respeito a normal para dentro η, onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de **Levi-Civita** no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Como B é convexo, temos que $\Pi^{\partial B}(X,X) \geq 0$. Seja ν o vetor normal a $\partial M \subset M$ apontado para fora. Considere uma variação normal $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ da imersão $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ onde seu vetor variacional é dado por $\xi = fN$ com $f \in C^{\infty}(M)$.

Definição 1.15. *Dizemos que Φ é admissível se $\Phi_t(int(M)) \subset int(B)$ e $\Phi_t(\partial M) \subset \partial B$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde $\Phi_t(p) := \Phi(t,p)$.*

Note que na definição acima, temos que $\Phi_t(\partial M) \subset \partial B$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com isso se $p \in \partial M$, então $\xi(p)$ é tangente a ∂B. Suponha que M é ponto crítico do funcional área restrito sobre todas as variações admissíveis que preservam volume. Pelos multiplicadores de Lagrange, segue que

$$A'(0) = \lambda V'(0),$$

para algum λ e toda variação de M, não necessariamente preservando volume. Neste caso, usando (1.27) concluímos que

$$\int_M (\lambda + nH)\langle \xi, N\rangle = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu\rangle,$$

para todo ξ tangente a ∂B. Assim, tomando $\xi = \pm(\lambda + nH)N$ e usando o fato que $\langle \xi, \nu\rangle$ não muda de sinal, concluímos que $H = -\lambda/n$ e $\langle \xi, \nu\rangle = 0$. Logo, se M é ponto crítico do funcional área restrito às variações admissíveis de M que preservam volume, então M encontra a fronteira de B ortogonalmente e possui curvatura média constante.

Definição 1.16. *Seja $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Diremos que ϕ é estacionária se $A'(0) = 0$ para toda variação de ϕ admissível que preserva volume, isto é, $V(t) = V(0)$ para todo t.*

Neste caso, tem-se que

$$V'(t) = \int_M \langle \xi, N\rangle = 0.$$

Para os próximos resultados considere a seguinte notação

$$g'_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) \text{ e } g''_{ij}(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_{ij}(t).$$

Lema 1.4. *Se $\xi^{\top} = 0$, então em $t = 0$ temos que*

i) $|g'(0)|^2 = 4|\langle \sigma_M(.,.), \xi\rangle|^2$;

ii) $tr(g''(0)) = 2|\langle \sigma_M(.,.), \xi\rangle|^2 + 2\,\|\nabla^{\perp} X_t\|^2 + 2div_g\left(\overline{\nabla}_{\xi} X_t\right)$.

Demonstração. Em $t=0$, temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\left\langle X_t^{\perp}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle - \left\langle X_t^{\perp}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\rangle \\ &= -\left\langle X_t^{\perp}, \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sigma_M\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Com isso

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle X_t^{\perp}, \sigma_M\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle, \tag{1.41}$$

em $t=0$. Como $X_t = \xi = \xi^{\perp}$, em $t=0$, de (1.29) e (1.41) segue que

$$g'_{ij}(0) = -2\left\langle \xi, \sigma_M\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle. \tag{1.42}$$

Logo,

$$|g'(0)|^2 = 4g^{ik}g^{jl}\left\langle \xi, \sigma_M\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)\right\rangle\left\langle \xi, \sigma_M\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}\right)\right\rangle,$$

o que implica que

$$|g'(0)|^2 = 4|\left\langle \sigma_M(.,.), \xi\right\rangle|^2.$$

Agora provaremos (ii). Note que

$$X_t\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{X_t}\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{X_t}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Como a conexão é simétrica, temos que $\overline{\nabla}_{X_t}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t$. Daí,

$$\begin{aligned}X_t\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_{X_t}\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}\overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &+ \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}\overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{X_t}\overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t - \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}\overline{\nabla}_{X_t} X, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}\overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle + \overline{R}\left(X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}}\overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (1.43)\end{aligned}$$

De (1.29) temos que

$$g''(0) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\left\langle \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} X_t \right\rangle,$$

e então de (1.43) segue que

$$\begin{aligned} g''_{ij}(0) &= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle + \overline{R}\left(X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right) + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} \overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &+ \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t \right\rangle + \overline{R}\left(X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right) + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} \overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right\rangle. \end{aligned}$$

Da simetria do tensor curvatura $\overline{R}$ obtemos

$$tr(g''(0)) = 2g^{ij}\overline{R}\left(X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right) + 2g^{ij}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} \overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right\rangle + 2g^{ij}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t \right\rangle \tag{1.44}$$

Veja que

$$\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}.$$

Assim,

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \right\rangle = \sum_{l=1}^{m} a_{il} g_{lk}.$$

Daí, temos que

$$a_{il} = g^{kl}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Logo,

$$\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top} = g^{kl}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial\Phi}{\partial x_l},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\top} \right\rangle &= g^{kl}g^{ab}g_{lb}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_a} \right\rangle \\ &= g^{kl}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_l} \right\rangle. \end{aligned} \tag{1.45}$$

De (1.41) segue que

$$\left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\top} \right\rangle = g^{kl}\left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right) \right\rangle \left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\right) \right\rangle.$$

Agora, decompondo

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t = \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\perp}$$

e

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t = \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\perp},$$

obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle = \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\top}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\top} \right\rangle + \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\perp}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\perp} \right\rangle.$$

Por (1.45) temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t, \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t \right\rangle &= g^{kl} \left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)\right\rangle \left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\right)\right\rangle \\ &+ \left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\perp}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\perp} \right\rangle. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima em (1.44) obtemos

$$\begin{aligned} tr(g''(0)) &= 2g^{ij}\overline{R}\left(X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right) + 2g^{ij}\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} \overline{\nabla}_{X_t} X_t, \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right\rangle + 2g^{ij}\left\langle \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}} X_t\right)^{\perp}, \left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}} X_t\right)^{\perp} \right\rangle \\ &+ 2g^{ij}g^{kl}\left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)\right\rangle \left\langle X_t, \sigma_M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

Como $\overline{R} = 0$ pois $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, segue que

$$tr(g''(0)) = 2|\left\langle \sigma_M(.,.), X\right\rangle|^2 + 2\|\nabla^{\perp} X\|^2 + 2div\left(\overline{\nabla}_X X\right).$$

$\square$

O teorema a seguir nos dá como consequência a Segunda Fórmula de Variação da área. Defina a função $J : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$J(t) = A(t) + nHV(t). \tag{1.46}$$

Proposição 1.9. *Sejam $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e uma variação normal Φ. Então*

$$J''(0) = \int_M \left(\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2\right) dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 dM,$$

onde $\Pi^{\partial B}$ é a segunda forma fundamental de $\partial B \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstração. Lembre-se que por (1.30) temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} dM_t = \frac{1}{2} tr\left(g'(t)\right) dM_t.$$

Além disso, temos que

$$V'(t) = \int_M f(t) dM_t,$$

onde $f(t) = \langle X_t, N \rangle$. Daí

$$J'(t) = \int_M \left(\frac{1}{2} tr(g'(t)) + nHf(t) \right) dM_t.$$

Isto implica que

$$J''(0) = \int_M \left(\frac{1}{2} tr(g'(0)) + nHf \right) \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} dM_t + \int_M \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} tr(g'(t) + nHf'(0) \right) dM. \quad (1.47)$$

De (1.28) e usando o fato que $X_0 = \xi$, temos que

$$tr(g'(0)) = 2g^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_\xi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle = 2g^{ij} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \xi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Agora, de (1.32) e (1.35) obtemos que

$$\frac{1}{2} tr(g'(0)) = -\langle \xi, \mathbf{H}_{M_0} \rangle = -\langle fN, nHN \rangle = -nHf(0). \quad (1.48)$$

Para $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} tr(g'(t))$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} tr(g'(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} (g^{ij} g'_{ij}) = g'_{ij}(0) \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} g^{ij} + g^{ij}(0) g''_{ij}(0).$$

Agora note que

$$g^{ik}(t) g_{kl}(t) = \delta_{il},$$

implica que

$$\frac{d}{dt} \left(g^{ik}(t) g_{kl}(t) \right) = \left(\frac{d}{dt} g^{ik}(t) \right) g_{kl}(t) + g^{ik}(t) g'_{kl}(t) = 0.$$

Assim

$$\left(\frac{d}{dt} g^{ik}(t) \right) g_{kl}(t) = -g^{ik}(t) g'_{kl}(t).$$

Multiplicando por $g^{jl}(t)$ ficamos com

$$\left(\frac{d}{dt} g^{ik}(t) \right) g_{kl}(t) g^{jl}(t) = -(g_t)^{ik} g'_{kl}(t) g^{lj}(t).$$

Somando em l obtemos

$$\frac{d}{dt}g^{ij}(t) = -g^{ik}(t)g'_{kl}(t)g^{jl}(t).$$

Daí

$$g'_{ij}(0)\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} g^{ij} = -g'_{ij}(0)g^{ik}(0)g'_{kl}(0)g^{jl}(0) = -|g'(0)|^2.$$

Com isso temos que

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} tr(g'(t)) = -|g'(0)|^2 + tr(g''(0)).$$

Pelo Lema 1.4 obtemos

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} tr(g'(t)) = -|\langle \sigma_M(.,.), \xi\rangle|^2 + \|\nabla^\perp X_t\|^2 + div\left(\overline{\nabla}_\xi X_t\right). \tag{1.49}$$

Faça $X_t = fN + X_t^\top$, onde $X_0^\top = 0$. Como em $\mathbb{R}^{n+1}$ vale que $\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_Y X$ para quaisquer dois campos X e Y, segue que $\overline{\nabla}_{X_t} X_t^\top = 0$. Daí, em $t = 0$ vale que

$$\overline{\nabla}_{X_t} X_t = f\overline{\nabla}_N fN = X_t(f)N + f^2\overline{\nabla}_N N.$$

Decompondo nas componentes normal e tangente, obtemos

$$\left(\overline{\nabla}_{X_t} X_t\right)^\perp = f'N \quad \text{e} \quad \left(\overline{\nabla}_{X_t} X_t\right)^\top = f^2\overline{\nabla}_N N.$$

Assim, em $t = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
div\left(\overline{\nabla}_\xi X_t\right)^\perp &= g^{ij}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}(f'N), \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= g^{ij}(0)\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(f')N + f'(0)\overline{\nabla}_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}N, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= f'(0)g^{ij}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}N, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right\rangle \\
&= -nHf'(0)
\end{aligned} \tag{1.50}$$

e

$$div\left(\overline{\nabla}_\xi X_t\right)^\top = div(f^2\overline{\nabla}_N N). \tag{1.51}$$

Além disso, tomando um referencial ortonormal $\{e_i\}_1^n$ em torno de um ponto $p \in M$, em $t = 0$, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_i} X_t = \overline{\nabla}_{e_i}(fN) = e_i(f)N + f\overline{\nabla}_{e_i} N.$$

Logo

$$\overline{\nabla}^{\perp}_{e_i} X_t = e_i(f)N,$$

em $t = 0$. Daí, em $t = 0$ temos que

$$\|\overline{\nabla}^{\perp} X_t\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}^{\perp}_{e_i} X_t, \overline{\nabla}^{\perp}_{e_i} X_t \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} (e_i(f))^2 = \|\nabla f\|^2. \tag{1.52}$$

Veja também que

$$|\langle \sigma(.,.), \xi\rangle|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle X_t, \sigma(e_i, e_j)\rangle^2 = f^2 \sum_{i,j=1}^{n} \langle N, \sigma(e_i, e_j)\rangle^2 = f^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle^2 = f^2\|\sigma\|^2. \tag{1.53}$$

Substituindo (1.50),(1.51), (1.52) e (1.53) em (1.49) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} tr(g'(t)) = -f^2\|\sigma\|^2 + \|\Delta f\|^2 - nHf'(0) + div(f^2\overline{\nabla}_N N). \tag{1.54}$$

Assim, substituindo (1.48) e a expressão acima em (1.47) ficamos com

$$J''(0) = \int_M \left(\|\Delta f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2\right) dM + \int_M div(f^2\overline{\nabla}_N N) dM.$$

Agora, usando o Teorema da Divergência na última integral da expressão acima, obtemos

$$\int_M div(f^2\overline{\nabla}_N N) dM = \int_{\partial M} f^2 \left\langle \overline{\nabla}_N N, \nu \right\rangle ds,$$

onde ν é a normal a ∂M para fora que coincide com o vetor normal a ∂B para fora $-\eta$. Além disso, como $\langle N, \eta\rangle = 0$ pois η é um vetor tangente a M que é normal a sua fronteira, implicando que

$$\left\langle \overline{\nabla}_N N, \nu \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_N N, -\eta \right\rangle = -\left\langle -\overline{\nabla}_N \eta, N \right\rangle = -\Pi^{\partial B}(N, N),$$

onde $\Pi^{\partial B}$ é a segunda forma fundamental de ∂B com respeito à normal para dentro. Com isso temos que

$$\int_M div_g \left(\overline{\nabla}_{\xi} X_t\right) dM = -\int_{\partial M} f^2 \Pi^{\partial B}(N, N) ds. \tag{1.55}$$

Logo

$$J''(0) = \int_M \left(\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2\right) dM - \int_{\partial M} f^2 \Pi^{\partial B}(N, N) ds.$$

□

Temos do Lema 1.3 que existe uma variação normal $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que preserva volume, onde seu vetor variacional é dado por $\xi = fN$ com $f \in C^\infty(M)$ tendo média zero em M. Com isso, obtemos o seguinte Corolário

Corolário 1.7. ***(Fómula da Segunda Variação de área)*** *Sejam $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e uma variação admissível Φ que preserva volume. Então*

$$A''(0) = \int_M \left(\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2 \right) dM - \int_{\partial M} f^2 \Pi^{\partial B}(N, N) ds$$

ou de forma equivalente

$$A''(0) = -\int_M \left(f\Delta f + \|\sigma\|^2 f^2 \right) dM + \int_{\partial M} \left(f\frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 \right) ds,$$

onde $f \in C^\infty(M)$, N é a normal a M e ν é a normal para fora a ∂M.

Demonstração. Como a varição preserva volume e

$$J(t) = A(t) + nHV(t),$$

segue diretamente que

$$A''(0) = J''(0).$$

□

1.5 Princípio do Máximo de Hopf

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Considere um operador linear diferencial L em Ω de segunda ordem da seguinte forma.

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Suponha que a matriz (a_{ij}) é simétrica para todo $x \in \Omega$ e L é um operador uniformemente elíptico, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \eta_i \eta_j \geqslant \lambda |\eta|^2,$$

para todo $x \in \Omega$ e para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, vamos supor que exite uma constante $C > 0$ tal que

$$|a_{ij}(x)|, |b_i(x)|, |c(x)| \leqslant C \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

Teorema 1.8. ***(Princípio do Máximo de Hopf)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo e L um operador linear em Ω de segunda ordem tal que $c(x) \leqslant 0$. Seja $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $L(u) \leqslant 0$. Se u atinge seu máximo em Ω, então u é uma constante não negativa em Ω. Caso contrário, se existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) > 0$, então a derivada normal para fora, se esta existe, satisfaz $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$. Além disso, se $c(x) \equiv 0$, então as mesmas condições são válidas para um máximo não positivo.*

Para mais detalhes ver [18], [17].

Capítulo 2

Hipersuperfície Estáveis de Fronteira Livre no $\mathbb{R}^{n+1}$

Neste capítulo, vamos definir estabilidade para Hipersuperfícies. Além disso, veremos alguns resultados preliminares que auxiliarão na demonstração do Teorema Principal. Aqui $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão com curvatura média constante H em um conjunto convexo B tal que $\phi(int(M)) \subset intB$ e $\phi(\partial M) \subset \partial B$.

2.1 A Forma do Índice

Seja $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão estacionária, dizemos que ϕ é **estável** se $A''(0) \geq 0$ para toda variação admissível de ϕ que preserva volume.

Vamos associar uma forma de índice a fórmula da Primeira Variação de Área para variações admissíveis que preservam volume. Considere o conjunto $\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{H}^1(M); \int_M f dM = 0 \right\}$ onde $\mathcal{H}^1$ denota o Espaço de Sobolev em M. Motivada pela fórmula da segunda varição de de área, temos a seguinte definição.

Definição 2.1. *A forma do índice $\mathcal{I}$ de ϕ é a forma bilinear simétrica em $\mathcal{H}^1(M)$ dada por*

$$\mathcal{I}(f,g) = \int_M \left(\langle \nabla f, \nabla g \rangle - \|\sigma\|^2 fg \right) dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N) fg ds. \tag{2.1}$$

Segue diretamente da definição que a imersão ϕ é estacionária estável se, e somente se, $\mathcal{I}(f,f) \geq 0$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Definição 2.2. *Seja $f \in \mathcal{F}$. O campo fN é um campo de Jacobi se $\mathcal{I}(f,g) = 0$ para toda $g \in \mathcal{F}$.*

Lema 2.1. *Seja $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão estacionária e $f \in \mathcal{F}$.*

i) fN é um campo de Jacobi se, e somente se, $f \in C^\infty(M)$ e

$$\begin{cases} \Delta f + \|\sigma\|^2 f = \textit{constante em } M \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \Pi^{\partial B}(N,N) f \ \textit{em } \partial M \end{cases} \tag{2.2}$$

ii) Se ϕ é estacionária estável e $\mathcal{I}(f,f) = 0$, então fN é um campo de Jacobi.

Demonstração. Suponhamos que $f \in C^\infty(M)$ satisfaz (2.2). Vamos mostrar que $\mathcal{I}(f,g) = 0$ para toda $g \in \mathcal{F}$, ou seja, fN é um campo de Jacobi. Assim, usando (2.2), o fato que $f \in C^\infty(M)$ e o Teorema da Divergência 1.3, temos que

$$\begin{aligned} I(f,g) &= -\int_M g(\Delta f + \|\sigma\|^2 f) dM + \int_{\partial M} g \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N,N) f \right) dM \\ &= -(\Delta f + \|\sigma\|^2 f) \int_M g dM \\ &= 0, \end{aligned}$$

para toda $g \in \mathcal{F}$.

Agora vamos supor que $f \in \mathcal{F}$ e fN é um campo de Jacobi.

Vamos mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \Pi^{\partial B}(N,N) f$$

em ∂M. De fato, considere a função

$$\bar{g}(p) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \in M \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N,N), & \text{se } p \in \partial M. \end{cases}$$

Temos que $\bar{g} \in \mathcal{F}(M)$, e como fN é um campo de Jacobi, então $\mathcal{I}(f,g) = 0$ para toda função $g \in \mathcal{F}(M)$, em particular vale para $\bar{g}$. Assim,

$$0 = \mathcal{I}(f, \bar{g}) = \int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N,N) f \right)^2 ds.$$

Portanto $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = \Pi^{\partial B}(N,N) f$ em ∂M. Com isso nos resta mostrar que $\Delta f + \|\sigma\|^2 f =$ constante em M.

Agora defina a função $F(p) = \Delta f + |\sigma|^2 f$ e considere $F_0 = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_M F dM$, onde $A = \displaystyle\int_M dM$.

Afirmação: $F \equiv F_0$.

Suponhamos que $F \neq F_0$, então existe pelo menos um ponto $\bar{p} \in M$, tal que $(F - F_0)(\bar{p}) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $(F - F_0)(\bar{p}) > 0$. Agora, considere os seguintes subconjuntos de M.

$$M^+ = \{q \in M | (F - F_0)(q) > 0\} \text{ e } M^- = \{q \in M | (F - F_0)(q) < 0\}.$$

Note que M^+ é não vazio, pois $\bar{p} \in M^+$, além disso como $F - F_0$ é uma função contínua, segue que M^+ é aberto. Sejam $U \subset M$ aberto com $\overline{U} \subset M^+$ e uma aplicação $\varphi : M \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, com suporte compacto em M^+, tal que $0 \leq \varphi(p) \leq 1$, para todo $q \in M$ e $\varphi(q) = 1$ se $q \in \overline{U}$.

Assim

$$K = \int_M \varphi(F - F_0) dM > 0. \tag{2.3}$$

Afirmamos que M^- também é não vazio. Observemos que $\int_M (F - F_0) dM = 0$, pois

$$\int_M (F - F_0) dM = \int_M F dM - F_0 \int_M dM = \int_M F dM - \int_M F dM = 0.$$

Com isso, se $M^- = \emptyset$, então teríamos que $(F - F_0)(q) \geq 0$ para todo $q \in M$, mas como $(F - F_0)(\bar{p}) > 0$, isso implica que $\displaystyle\int_M (F - F_0) > 0$, o que não pode acontecer pela observação anterior. Portanto $M^- = \emptyset$. De forma análoga podemos definir uma função $\psi : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, de suporte em M^-. Seja $V \subset M$ aberto com $\overline{V} \subset M^-$, tal que $0 \leq \psi(p) \leq 1$, para todo $q \in M$ e $\psi(q) = 1$ se $q \in \overline{V}$, e então

$$L = \int_M \psi(F - F_0) dM < 0. \tag{2.4}$$

Agora, considere $g = (\varphi + \xi)(F - F_0)$, onde $\xi = -\dfrac{K}{L}\psi > 0$. Note que $g \in \mathcal{F}(M)$, pois

$$\int_M g dM = \int_M (\varphi + \xi)(F - F_0) dM = \int_M \varphi(F - F_0) dM + \int_M \xi(F - F_0) dM = K - \frac{K}{L}\int_M \psi(F - F_0) dM = 0.$$

Como fN é um campo de Jacobi, e já mostramos que $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \Pi(N,N)f$ em ∂M, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{I}(f,g) &= -\int_M g(\nabla f + |\sigma|^2 f)dM \\ &= -\int_M gFdM + F_0\int_M gdM \\ &= -\int_M g(F-F_0)dM \\ &= -\int_M (\varphi+\xi)(F-F_0)^2 dM < 0 \end{aligned}$$

o que não pode ocorrer, portanto $F \equiv F_0$.
Agora provaremos (ii). Como ϕ é estacionária estável, temos que $\mathcal{I}(g,g) \geq 0$ para toda $g \in \mathcal{F}$. Assim dado $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}$, temos que

$$0 \leq \mathcal{I}(f+\epsilon g, f+\epsilon g) = \mathcal{I}(f,f) + 2\epsilon\mathcal{I}(f,g) + \epsilon^2\mathcal{I}(g,g).$$

Multiplicando a expressão acima por ϵ^{-1} e usando a hipótese de que $\mathcal{I}(f,f) = 0$, ficamos com

$$0 \leq 2\mathcal{I}(f,g) + \epsilon\mathcal{I}(g,g). \tag{2.5}$$

De forma análoga para $\mathcal{I}(f-\epsilon g, f-\epsilon g)$, obtemos

$$0 \leq -2\mathcal{I}(f,g) + \epsilon\mathcal{I}(g,g). \tag{2.6}$$

Como ϵ é arbitrário, fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, de (2.5) temos que $\mathcal{I}(f,g) \geq 0$ e de (2.6), $\mathcal{I}(f,g) \leq 0$. Logo $\mathcal{I}(f,g) = 0$, e portanto fN é um campo de Jacobi. □

2.2 Estabilidade para Hipersuperfícies em Conjuntos Convexos

Nesta seção, faremos alguns resultados sobre Hipersuperfícies estacionárias estáveis em conjuntos convexos. Aqui estamos considerando a fronteira ∂M, e desta forma, vamos encontrar as possibilidades para o gênero g e o número de componentes conexas r da fronteira.

Lema 2.2. *Sejam B um conjunto convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi : M \to B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície estacionária estável em B. Então $\int_M NdM \neq 0$, onde $N : M \to S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a aplicação de Gauss de M.*

Demonstração. Sejam $\beta = \{a_i\}_1^n$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $N_i = \langle N, a_i\rangle$. Assim temos de

(1.6) que para cada i, vale

$$\Delta N_i + |\sigma|^2 N_i = 0.$$

Portanto

$$\mathcal{I}(N_i, N_i) = \int_{\partial M} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) N_i^2 \right) ds. \tag{2.7}$$

Para chegarmos a uma contradição, suponhamos que $\int_M N dA = 0$. Daí $\int_M N_i dA = 0$ para cada $i = 1, ..., n+1$. Assim temos que $N_i \in \mathcal{F}$ para todo i, e como ϕ é estacionária estável, segue que $I(N_i, N_i) \geq 0$.

Agora note que

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} N_i^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_{i=1}^{n+1} N_i^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu}(1) = 0.$$

Assim, somando (2.7) em i, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{I}(N_i, N_i) &= \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\partial M} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) N_i^2 \right) ds \\ &= \int_{\partial M} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \left(N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) N_i^2 \right) \right] ds \\ &= \int_{\partial M} \left[\sum_{i=1}^{n+1} N_i \frac{\partial N_i}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) \sum_{i=1}^{n+1} N_i^2 \right] ds \\ &= -\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N) ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Mas como B é estritamente convexo, então $\Pi^{\partial B}(N, N) > 0$, contradizendo a desigualdade acima. Portanto $\int_M N dM \neq 0$.

$\square$

Denotemos por g o gênero de M e r o número de componentes conexas da fronteira ∂M. Recordamos a fórmula

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2g - r.$$

Teorema 2.1. *Seja B um conjunto convexo em $\mathbb{R}^3$. Se $\phi : M \to B$ é estacionária estável, então as possibilidades para os valores de g e r são*

i) $g = 0$ *ou* 1 *e* $r = 1,2$ *ou* 3*;*

ii) $g = 0$ *ou* 3 *e* $r = 1$.

Demonstração. Seja $\overline{M}$ uma superfície Riemanniana compacta obtida de M colando um disco em cada componente conexa da fronteira ∂M. Por um resultado de [8], pg. 261, existe uma aplicação conforme $\overline{\psi} : \overline{M} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$, tal que

$$grau(\overline{\psi}) \leq 1 + \left[\frac{g+1}{2}\right], \tag{2.9}$$

onde $[x]$ denota o maior número inteiro que é menor ou igual a x. Note que se g é um número par positivo, então $2\left[\frac{g+1}{2}\right] = g$, enquanto que se g for um número ímpar positivo, então $2\left[\frac{g+1}{2}\right] = g+1$.

Seja $\psi : M \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a restrição de $\overline{\psi}$ a M.

Afirmação: Existe um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ tal que

$$\int_M (\varphi \circ \psi)_i dM = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \tag{2.10}$$

onde $(\varphi \circ \psi)_i$ são funções coordenadas de função $\varphi \circ \psi$.

Para mais detalhes ver em [12].

Desta forma, podemos supor que ψ satisfaz

$$\int_M \psi_i dM = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Como ϕ é estável e $\Pi^{\partial B}(N, N) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq I(\psi_i, \psi_i) &= \int_M \left(|\nabla \psi_i|^2 - \|\sigma\|^2 \psi_i^2\right) dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N)\psi_i^2 ds \qquad (2.11) \\ &\leq \int_M \left(|\nabla \psi_i|^2 - \|\sigma\|^2 \psi_i^2\right) dM. \end{aligned}$$

Somando em i na inequação acima e usando Teorema de Gauss-Bonnet e o fato que $\|\sigma\|^2 = 4H^2 - 2K$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M \left(|\nabla \psi|^2 - \|\sigma\|^2\right) dM = \int_M \left(|\nabla \psi|^2 - 4H^2 + 2K\right) dM \\ &< 8\pi grau(\overline{\psi}) - 4H^2 A + 4\pi \mathcal{X}(M) - 2\int_{\partial M} k_g ds. \qquad (2.12) \end{aligned}$$

Temos que $k_g = \Pi(T,T) \geq 0$, onde T é tangente à fronteira de M. Note que a condição $k_g = \Pi(T,T)$ vem da condição de fronteira livre. Assim usando (2.9),temos que

$$\begin{aligned} 0 &< 8\pi\left(1+\left[\frac{g+1}{2}\right]\right) - 4H^2A + 4\pi\left(2-2g-r\right) \\ &= 4\pi\left(2+2\left[\frac{g+1}{2}\right]\right) - 4H^2A + 4\pi\left(2-2g-r\right) \\ &= 4\pi\left(4+2\left[\frac{g+1}{2}\right] - 2g - r\right) - 4H^2A. \end{aligned}$$

Portanto,

$$4\pi\left(4-2g+2\left[\frac{g+1}{2}\right] - r\right) > 4H^2A \geq 0. \tag{2.13}$$

Analisemos a desigualdade acima para g par e ímpar.

Caso 1) Se g for um número positivo par, de (2.13) temos que

$$\begin{aligned} 0 &< 4+2\left[\frac{g+1}{2}\right] - 2g - r \\ &\Leftrightarrow 0 < 4+g-2g-r \\ &\Leftrightarrow g+r<4 \end{aligned}$$

Para este, caso se $g=0$ então as possibilidades para r são $1,2$ ou 3. Se $g=2$ então $r=1$.

Caso 2) Se g for um número positivo ímpar, novamente de (2.13) temos

$$\begin{aligned} 0 &< 4+2\left[\frac{g+1}{2}\right] - 2g - r \\ &\Leftrightarrow 0 < 4+(g+1)-2g-r \\ &\Leftrightarrow 0 < 5-g-r \end{aligned}$$

Para este caso, temos que se $g=1$, então as possibilidades para r são $1,2$ ou 3. Se $g=3$, então só uma possibilidade para r, que é $r=1$.

Agora dos casos 1 e 2, concluímos que

i) Se $g=0$ ou 1, então $r=1,2$ ou 3.

ii) Se $g=2$ ou 3, então $r=1$.

$\square$

2.3 Estabilidade para Hipersuperfícies na Bola unitária

Para os próximos resultados, consideraremos B como sendo uma bola n-dimensional unitária centrada na origem. Para este caso temos que $\Pi^{\partial B}(N, N) = 1$ ao longo ∂M, e ainda estamos considerando ν como sendo o vetor apontando para fora ao longo de $\partial M \subset M$ normal a ∂M. Além disso, temos que $\nu = \phi$ ao longo da fronteira ∂M. Um dos principais objetivos nesta seção é demonstrar o Teorema (3.4), que é um resultador parcial, assim faremos uma reformulação dele no próximo capítulo.

Lema 2.3. *Se $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola unitária centrada na origem e $\phi : M \to B$ é uma imersão estacionária, então*

i) O vetor unitário ν apontando para fora ao longo de ∂M é uma direção principal de ϕ

ii) A segunda forma fundamental de ∂M em M com respeito ao vetor $-\nu$ é dada por $\langle , \rangle$. Em particular, se $n = 2$ então a curvatura geodésica da ∂M em M é igual a 1 em qualquer ponto.

Demonstração. i) Como B é a bola unitária, ν coincide com o vetor posição ϕ ao longo de ∂M. Assim, para qualquer campo X tangente a ∂M, temos

$$\langle -\overline{\nabla}_\nu N, X \rangle = \langle \sigma(X, \nu), N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \nu - \nabla_X \nu, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \nu, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \phi, N \right\rangle = \langle X, N \rangle = 0,$$

pois como ϕ coincide com o vetor posição ao longo da fronteira, temos que $\overline{\nabla}_X \phi = X$. Isto implica que $-\overline{\nabla}_\nu N$ é normal a fronteira ∂M, ou seja, $-\overline{\nabla}_\nu N = \lambda \nu$.

ii) Seja Y um campo tangente em ∂M. Como $\langle Y, \nu \rangle = 0$, pois ν é normal a fronteira, então $\left\langle \overline{\nabla}_X Y, \nu \right\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X \nu, Y \right\rangle$. Além disso, pelo fato de que $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, segue que $\left\langle \overline{\nabla}_X \nu, \nu \right\rangle = 0$. Logo $S_{-\nu}(X) = -\overline{\nabla}_X(-\nu)$. Portanto a segunda forma fundamental de ∂M com respeito a $-\nu$, é dada por

$$-\left\langle \overline{\nabla}_X Y, \nu \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \nu, Y \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X \phi, Y \right\rangle = \langle X, Y \rangle .$$

Estamos novamente usando o fato de que $\overline{\nabla}_X \phi = X$.

Se $\alpha : I \to \partial M$ é uma parametrização regular por comprimento de arco, então a curvatura geodésica é dada por

$$k_g = \langle \nabla_{\alpha'}\phi, \alpha' \rangle = 1.$$

□

Proposição 2.1. *Se $\phi : M \to B$ é uma superfície estacionária em uma bola unitária $B \subset \mathbb{R}^3$, então*

$$H^2 A + L \geqslant 2\pi. \tag{2.14}$$

Se além disso ∂M não for mergulhada, então

$$H^2 A + L \geqslant 4\pi. \tag{2.15}$$

Demonstração. Suponha que B está centrado na origem de $\mathbb{R}^3$. Considere um grupo a um parâmetro $\lambda > 0$ de transformações conformes $\{\psi_\lambda(x)\}$ de $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, dada por $\psi_\lambda(p) = \Pi^{-1} \circ \overline{\Pi}^{-1} \circ T_\lambda \circ \overline{\Pi} \circ \Pi(p)$. Aqui $T_\lambda(x) = \frac{x}{\lambda}$, Π e $\overline{\Pi}$ são projeções estereográficas de $\mathbb{S}^3$ em $\mathbb{R}^3$, porém equanto Π é sobre o polo norte N, $\overline{\Pi}$ é sobre o ponto $p_0 = (1, 0, 0)$. Veja o diagrama

$$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{\Pi} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\overline{\Pi}} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{T_\lambda} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \xrightarrow{\overline{\Pi}^{-1}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\Pi^{-1}} \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}.$$

Desta forma, temos que este grupo de transformações conformes preserva a bola B e fixa dois pares de pontos antípodas p_0 e $-p_0 \in \mathbb{S}^2$. Além disso, quando $\lambda \longrightarrow \infty$, temos que $\psi_\lambda(p)$ converge para $-p_0$ para qualquer que seja o ponto $p \in \mathbb{R}^3 \backslash \{p_0\}$. Agora, denote por $\overline{H}, \overline{K}$ e $d\overline{M}$ como sendo a curvatura média, curvatura de Gauss e o elemento de volume induzido de M pela imersão $\psi_\lambda \circ \phi$. Assim, temos que

$$H^2 A - \int_M K dM = \int_M \left(\overline{H}^2 - \overline{K}\right) d\overline{M}. \tag{2.16}$$

Esta igualdade segue do fato que a integral no lado direto é invariante por transformações conformes, veja [12].

Por outro lado, pelo Teorema de Gauss-Bonnet e o item (ii) do Lema 2.3 segue que

$$\int_M K dM + L = \int_M \overline{K} d\overline{M} + \overline{L} = 2\pi\chi(M),$$

onde $\overline{L}$ denota o comprimento da fronteira ∂M induzido pela métrica de $\psi_\lambda \circ \phi$. Daí, substituindo as integrais relativas à curvatura Gaussiana em (2.16), obtemos que

$$H^2A + L = \int_M \overline{H}^2 dM + \overline{L}.$$

Note que na construção acima de ψ_λ podemos escolher quaisquer dois pontos antípodas. Em particular, escolhemos p_0 tal que $p_0 \in \phi(\partial M)$. Como $\psi_\lambda(p_0) = p_0$ para todo λ e $\psi_\lambda(p) \to -p_0$ quando $\lambda \to \infty$, segue que $\psi_\lambda \circ \phi(\partial M)$ converge a um ou mais equadores da esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Daí, $\lim_{\lambda \to \infty} \overline{L} \geq 2\pi$.

Caso ∂M não seja mergulhada, basta escolher p_0 tal que p_0 seja um ponto múltiplo de ϕ. Desta forma, $\psi_\lambda \circ \phi(\partial M)$ converge a dois ou mais equadores da esfera unitária $\mathbb{S}^2$. Daí, $\lim_{\lambda \to \infty} \overline{L} \geq 4\pi$. $\square$

Lema 2.4. *$\phi : M \to B$ é uma superfície estacionária em uma bola unitária $B \subset \mathbb{R}^3$. Tem-se que*

$$div_g \left(\phi - \langle \phi, N \rangle N\right) = n \left(1 + H \langle \phi, N \rangle\right). \tag{2.17}$$

Além disso, usando o Teorema da Divergência e o fato de que $\nu = \phi$ em ∂M, obtemos a fórmula de Minkowski

$$L = n \left(A + \int_M H \langle \phi, N \rangle dM \right). \tag{2.18}$$

Demonstração. Para mostramos a equação (2.17), consideremos um sistema de coordenadas ortonormal $\{e_i\}$. Assim

$$\begin{aligned}
div_g \left(\phi - \langle \phi, N \rangle N\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \left(\phi - \langle \phi, N \rangle N\right), e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} (\langle \phi, N \rangle N), e_i \right\rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \right\rangle - \left\langle e_i \left(\langle \phi, N \rangle\right) N + \langle \phi, N \rangle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \right\rangle - e_i \left(\langle \phi, N \rangle\right) \langle N, e_i \rangle - \langle \phi, N \rangle \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \right\rangle + \langle S_N e_i, e_i \rangle \langle \phi, N \rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \phi, e_i \right\rangle + nH \langle \phi, N \rangle \\
&= n + nH \langle \phi, N \rangle
\end{aligned}$$

pois como ϕ é o vetor posição, segue que $\overline{\nabla}_{e_i}\phi = e_i$.

Para mostrarmos (2.18), usamos (2.17) e o Teorema da Divergência. Daí

$$\int_M div_g\left(\phi - \langle \phi, N\rangle N\right) dM = \int_{\partial M} \langle \phi - \langle \phi, N\rangle N, \nu\rangle\, ds.$$

Como $\phi = \nu$ em ∂M, temos

$$\int_{\partial M} \langle \nu - \langle \nu, N\rangle N, \eta\rangle\, ds = \int_{\partial M} \langle \nu, \eta\rangle\, ds.$$

Usando o fato de que ν e η são paralelos e unitários, por Cauchy-Schwarz, segue que

$$\int_M div_g\left(\phi - \langle \phi, N\rangle N\right) dM = \int_{\partial M} \langle \nu, \eta\rangle\, ds = \int_{\partial M} ||\nu|| ||\eta|| = L$$

e portanto

$$L = n\left(A + \int_M H\,\langle \phi, N\rangle\, dM\right),$$

onde A é o volume de M. $\square$

Teorema 2.2. *Sejam $B \in \mathbb{R}^{n+1}$ a bola unitária. Suponha que $\phi : M \to B$ é estacionária estável e miníma. Então ϕ é totalmente geodésica.*

Demonstração. Defina $\varphi = \phi - c$, onde $c = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_M \phi dM$. Note que as funções coordenadas ϕ_i de ϕ pertencem a $\mathcal{F}$, pois

$$\int_M \varphi dM = \int_M (\phi - c)\, dM = \int_M \phi dM - c\int_M dM = \int_M \phi dM - \left(\frac{1}{A}\int_M \phi dM\right) A = 0.$$

Usando as condições de estabilidade de ϕ e o fato de que a segunda forma fundamental de B é $\Pi^{\partial B}(N, N) = 1$ em ∂M, temos

$$0 \leq I(\varphi_i, \varphi_i) = \int_M \left(||\nabla \varphi_i||^2 - \|\sigma\|^2 \varphi_i^2\right) dM - \int_{\partial M} \varphi_i^2 ds.$$

Assim podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\int_M ||\nabla \varphi_i||^2 \geq \int_M \|\sigma\|^2 \varphi_i^2 dA + \int_{\partial M} \varphi_i^2 ds$$

então

$$\int_M ||\nabla \varphi||^2 \geq \int_{\partial M} ||\varphi||^2 ds. \tag{2.19}$$

Note que se a igualdade em (2.19) ocorre, então a norma da segunda forma fundamental é nula, ou seja, ϕ é totalmente geodésica.

Como $\nabla\varphi = \overline{\nabla}\varphi - \langle\overline{\nabla}\varphi, N\rangle N$, então $\|\nabla\varphi\|^2 \leq n$. Daí de (2.19) obtemos

$$nA \geq \int_{\partial M} ||\varphi||^2 ds = \int_{\partial M} \langle \phi - c, \phi - c\rangle \, ds = \int_{\partial M} \left(||\phi||^2 - 2\langle \phi, c\rangle + ||c||^2\right) ds.$$

Como $\phi = \nu$ em ∂M, então

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} = \langle \nabla\phi_i, \nu\rangle = \langle \overline{\nabla}\phi_i, \nu\rangle = \langle e_i, \nu\rangle = \nu_i = \phi_i.$$

Assim, como as funções coordenadas de uma superfície mínima é harmônica, segue do Teorema da Divergência que

$$0 = \int_M \Delta\phi dM = \int_{\partial M} \phi ds.$$

Além disso, do fato que $\int_M \phi_i dM = 0$ para cada $i = 1, 2, 3$ e $c = (c_1, c_2, c_3)$ é constante, temos que $\int_M \langle \phi, c\rangle \, dM = \int_M \left(\sum_{i=1}^{3} \phi_i c_i\right) dM = 0$. Isto implica que

$$nA \geq \int_{\partial M} \left(\|\phi\|^2 + |c|^2\right) ds = L(1 + |c|^2).$$

Por outro lado como ϕ é mínima, segue de (2.18) que $L = nA$, o que implica que $L||c||^2 \leq 0$. Logo $c = 0$. Portanto

$$nA \geq \int_M \|\nabla\varphi\|^2 dM \geq \int_{\partial M} \|\varphi\|^2 ds = L = nA,$$

ou seja, a igualdade vale em (2.19) e $\sigma \equiv 0$. Logo segue que ϕ é totalmente geodésica. $\square$

Lema 2.5. *Assuma que ϕ é estacionária estável e que B é uma bola unitária. Se $f \in C^\infty(M)$ é solução de*

$$\Delta f + ||\sigma||^2 f = 0 \tag{2.20}$$

então

$$\int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 ds \geq \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} ds. \tag{2.21}$$

Além disso, a igualdade é valida se, e somente se ou M é totalmente geodésica ou

$$\int_M f dM = 0 \quad e \quad f = \frac{\partial f}{\partial \nu} \quad em \quad \partial M. \tag{2.22}$$

Demonstração. Note que $\Pi^{\partial B}(N,N) = 1$ em ∂M. Assim, para $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(f+c,f+c) &= \mathcal{I}(f,f) + 2\mathcal{I}(f,c) + \mathcal{I}(c,c) \\
&= -\int_M f\left(\Delta f + \|\sigma\|^2 f\right) dM + \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds \\
&- 2\left[\int_M c\left(\Delta f + \|\sigma\|^2 f\right) dM + \int_{\partial M} c\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds\right] \\
&- \int_M ||\sigma||^2 c^2 dM - \int_{\partial M} c^2 ds \\
&\overset{(2.20)}{=} -c^2\int_M ||\sigma||^2 dM + \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds + 2c\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds - c^2\int_{\partial M} ds \\
&\leq \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds + 2c\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds - c^2 L. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Note que ocorre a igualdade em (2.23) se $c = 0$ ou $\sigma \equiv 0$, ou seja, M é totalmente geodésica. Faça $d = \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds$ e $b = 2\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds$. Daí, de (2.23) temos a inequação

$$-Lc^2 + bc + d \geq 0.$$

O máximo da expressão $-Lc^2 + bc + d$ ocorre em $c = \frac{b}{2L} = \frac{1}{L}\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right)$. Substituindo este valor de c em (2.23) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(f+c,f+c) &\leq -\frac{1}{L}\left\{\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds\right\}^2 + \frac{2}{L}\left\{\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds\right\}^2 + \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds \\
&= \frac{1}{L}\left\{\int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds\right\}^2 + \int_{\partial M} f\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right) ds \\
&\leq \int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\right)^2 ds + \int_{\partial M}\left(f\frac{\partial f}{\partial \nu} - f^2\right) ds \\
&= \int_{\partial M}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 - 2f\frac{\partial f}{\partial \nu} + f^2\right] ds + \int_{\partial M}\left(f\frac{\partial f}{\partial \nu} - f^2\right) ds \\
&= \int_{\partial M}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 ds - \int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \nu} ds, \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, onde na terceira linha utilizamos a desigualdade de Schwarz. Para $c_0 = -\frac{1}{A}\int_M f dM$ temos que $f + c_0 \in \mathcal{F}$, e então $\mathcal{I}(f+c_0, f+c_0) \geq 0$ já que ϕ é estável. Com isso temos a desigualdade (2.21).

Observe que se vale a igualdade em (2.21), então $\mathcal{I}(f+c_0, f+c_0) = 0$. Como ϕ é estacionária estável, segue do item (ii) do Lema (2.1) que $(f+c_0)N$ é um campo de Jacobi. Do item (i) do

Lema(2.1) temos que $\dfrac{\partial(f+c)}{\partial\nu} = f$ em ∂M. Por fim, se vale a igualdade em (2.23) e M não totalmente geodésica, então $c_0 = 0$, e portanto temos (2.22). $\square$

Defina a função $u = \langle \phi, N\rangle$. De (1.14) tem-se que

$$\Delta u + ||\sigma||^2 u = -nH. \tag{2.25}$$

Como ϕ coincide com ν em ∂M, então

$$u = \langle \phi, N\rangle = \langle \nu, N\rangle = 0 \quad \text{em} \quad \partial M. \tag{2.26}$$

Além disso, segue do Lema 2.3 que ν é uma direção principal de ϕ. Seja $\{e_i\}$ uma base que diagonaliza a segunda forma fundamental com $e_1 = \nu$. Daí,

$$\nabla u = \sum e_i(u)e_i = \sum \langle \phi, \nabla_{e_i} N\rangle e_i,$$

o que implica que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu\rangle = -k_\nu. \tag{2.27}$$

onde k_ν é a curvatura principal de M associada ao vetor ν.

O próximo resultado nos fornece informações sobre o sinal da função u e impõe restrições topológicas a M quando a integral em (2.18) é não negativa, isto é,

$$\int_M H\,\langle \phi, N\rangle\, dM = H \int_M u dM \geq 0.$$

Teorema 2.3. *Sejam B uma bola unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\phi : M \to B$ uma imersão estacionária estável com $L \geq nA$. Então u nunca se anula em $int(M)$ ou ϕ é totalmente geodésica. No primeiro caso, se além disso a fronteira ∂M é mergulhada, então $\phi(M)$ é uma superfície estrelada com respeito ao centro da bola.*

Demonstração. Mostraremos que se ϕ não for totalmente geodésica, então u nunca se anula em $int(M)$. Para isso vamos mostrar que $u \geq 0$ ou $u \leq 0$ em M. Neste caso, suponha o contrário e considere as aplicações $u^+, u^- \in \mathcal{H}^1$, definidas por

$$u^+ = \begin{cases} u(p), & \text{se } p \in M^+ \\ 0, & \text{se } p \in M \backslash M^+ \end{cases} \qquad u^- = \begin{cases} u(p), & \text{se } p \in M^- \\ 0, & \text{se } p \in M \backslash M^- \end{cases}$$

onde M^+ e M^- são subconjuntos de M tais que u é positivo e negativo, respectivamente. Note que, por hipótese M^+ e M^- são não vazios. Como u^+ e u^- se anulam no complementar da outra, então $\mathcal{I}(u^+,u^-)=0$. Além disso, de (2.26), temos que $u=0$ em ∂M. Assim $u^+=u^-=0$ em ∂M. Como $u=u^++u^-$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u^+,u^+) &= \int_M \left(\langle \nabla u^+, \nabla u^+\rangle - ||\sigma||^2 (u^+)^2\right) dM \\
&= \int_M \left(\langle \nabla u, \nabla u^+\rangle - ||\sigma||^2 u u^+\right) dM \\
&= \int_M -u^+ \left(\Delta u + ||\sigma||^2 u\right) dM \\
&\overset{(2.25)}{=} nH \int_M u^+ dM
\end{aligned} \tag{2.28}$$

De forma análoga, temos que

$$\mathcal{I}(u^-,u^-) = nH\int_M u^- dM \tag{2.29}$$

Agora, defina uma aplicação $f: M \to \mathbb{R}$, dada por $f = u^+ + au^-$, onde $a = -\dfrac{\int_M u^+ dM}{\int_M u^- dM} > 0$. Temos que $f=0$ em ∂M e $\displaystyle\int_M f dM = 0$, o que implica que $f \in \mathcal{F}$. Observe que

$$0 \le \mathcal{I}(f,f) = \mathcal{I}(u^+ + au^-, u^+ + au^-) = \mathcal{I}(u^+,u^+) + a^2\mathcal{I}(u^-,u^-),$$

já que ϕ é estável e $\mathcal{I}(u^+,u^-)=0$. Usando (2.28) e (2.29), a desigualdade acima torna-se

$$\begin{aligned}
0 \le nH\int_M u^+ dM + a^2 nH \int_M u^- dM &= anH\left[\frac{1}{a}\int_M u^+ dM + a\int_M u^- dM\right] \\
&= anH\left[-\int_M u^- dM - \int_M u^+ dM\right] \\
&= -anH\int_M u dM.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathcal{I}(f,f) = -anH\int_M u dM \ge 0. \tag{2.30}$$

Por outro lado, de (2.18) temos $L = nA + nH\displaystyle\int_M \langle \phi, N\rangle dM$. Por hipótese $L \ge nA$, o que implica que

$$nH\int_M u dM = L - nA \ge 0 \tag{2.31}$$

Assim de (2.30) e (2.31) segue que $\mathcal{I}(f,f)=0$. Do Lema (2.1), temos que $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}=f=0$ em ∂M, pois $\Pi^{\partial B}(N,N)=1$. Daí, de (2.27) e do fato que $f=\lambda u$, onde $\lambda=1$ ou a, segue que $k_\nu=0$. Assim, $\nabla_\nu N=0$, onde $N:M\to\mathbb{S}^n$ é a aplicação de Gauss. Se $\{e_i\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$, então $N=\sum_i N_i e_i$. Como $\nabla_\nu e_i=0$, segue que

$$0=\nabla_\nu N=\sum \nu(N_i)e_i,$$

o que implica que

$$\frac{\partial N_i}{\partial \nu}=\nu(N_i)=0.$$

Além disso, por (1.13) temos que $\Delta N_i+||\sigma||^2N_i=0$. Como estamos supondo que ϕ não é totalmente geodésica, o Lema (2.5) assegura que $\displaystyle\int_M N_i dM=0$, o que é uma contradição com o Lema (2.2). Logo, $u\geq 0$ ou $u\leq 0$.

Podemos escolher uma orientação de M tal que $u=\langle \phi,N\rangle\geq 0$. Note que se $H=0$, pelo Teorema (2.2), temos que ϕ é totalmente geodésica. Caso $H\neq 0$, por (2.18), temos

$$L=n\left(A+\int_M HudM\right)$$

e como por hipótese $L\geq nA$, então

$$0\leq L-nA=n\int_M HudM.$$

Com isso, tem-se que $H>0$, já que $u\geq 0$. Assim, de (1.14) temos que

$$\begin{cases} u\geq 0, \\ \Delta u=-\big(||\sigma||^2u+nH\big)<0, \\ u|_{\partial M}=0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Portanto, pelo princípio do máximo, para funções superharmônicas, $u>0$ em $int(M)$.

Para mostrar a segunda parte do teorema primeiro observe que $\phi(p)\neq 0$ para todo $p\in M$. Considere a projeção de M em uma esfera unitária, $F:M\to\mathbb{S}^n$, definida por

$$F(p)=\frac{\phi(p)}{\|\phi(p)\|}.$$

A derivada de F, $dF_p:T_pM\to T_{F(p)}\mathbb{S}^n$, é dada por

$$dF_p(v)=\frac{v\|\phi(p)\|^2-\langle\phi(p),v\rangle\phi(p)}{\|\phi(p)\|^3}.$$

Note que $u(p) = \langle N(p), \phi(p)\rangle \neq 0$ implica que o vetor posição $\phi(p)$ é não nulo e não pertence a $T_p\phi(M)$. Daí, se existe $v \in T_pM$ tal que $dF_p(v) = 0$, segue que $v = \dfrac{\langle \phi(p), v\rangle}{\|\phi(p)\|^2}\phi(p)$. Assim, se $\langle \phi(p), v\rangle = 0$, então $dF_p(v) = 0$ implica que $v = 0$, caso contrário concluímos que $\phi(p) \in T_p\phi(M)$, o que é uma contradição. Logo, a derivada $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}\mathbb{S}^n$ é uma bijeção e portanto $F : M \to \mathbb{S}^n$ é um homeomorfismo local. Vamos mostrar que F é um homeomorfismo sobre a imagem, que é equivalente a dizer que a superfície é estrelada em relação à origem da bola.

Sejam $p \in \partial M$ e uma curva $\gamma : (-\epsilon, 0] \to M$ parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \nu$. Note que

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3}\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle.$$

Daí,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \langle F(\gamma(t), N(p)\rangle = \langle dF_p(\nu), N(p)\rangle = \left\langle \frac{\nu}{\|p\|} - \frac{p}{\|p\|^3}\langle p, \nu\rangle, N(p)\right\rangle = 0$$

e

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \langle F(\gamma(t), N(p)\rangle = \langle \gamma''(0), N(p)\rangle = k_\nu,$$

já que $N(p)$ é ortogonal a ν e p para todo $p \in \partial M \subset \partial B$.

De (2.32), utilizando o Princípio do Máximo de Hopf na fronteira, obtemos de (2.27) que

$$k_\nu = -\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$$

em ∂M. Se $\beta(t) := \langle F(\gamma(t), N(p)\rangle$, então concluímos que podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) > 0$, $\beta'(t) < 0$ e $\beta''(t) > 0$ para todo $-\varepsilon < t < 0$. Do fato que $\beta(t) > 0$ e ∂M ser mergulhada, obtemos que $F(\gamma(t))$ pertence a componente conexa de $\mathbb{S}^n\backslash\phi(\partial M)$ que tem $\phi(p)$ como ponto de fronteira e $N(p)$ como normal para dentro. Se $\partial M = \bigcup_{i=1}^r \Gamma_i$, onde Γ_i são as componentes conexas de ∂M, então para cada i existe uma faixa estreita no interior de M em torno de Γ_i cuja imagem por F em $\mathbb{S}^n$ pertence à mesma componente conexa de $\mathbb{S}^n\backslash\phi(\Gamma_i)$. Seja D_i a componente conexa de $\mathbb{S}^n\backslash\phi(\Gamma_i)$ que não intersecta esta imagem. Defina $\overline{M}$ como a união de M com a união disjunta de todos os D_i e $\overline{F} : \overline{M} \to \mathbb{S}^n$ como

$$\overline{F}(p) = \begin{cases} F(p) & \text{se } p \in M \\ p & \text{se } p \in D_i \end{cases}.$$

Como o F é um difeomorfismo local, segue diretamente da definição de $\overline{F}$ que $\overline{F}$ é um homeomorfismo local. Daí, como $\overline{M}$ é compacta, segue que $\overline{F}$ é uma aplicação de recobrimento. Do fato que $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa, concluímos que $\overline{F}$ é um homeomorfismo, o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 2.4. *Suponha que B é uma bola unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e que ϕ é estacionária estável. Se $0 \in \phi(M)$, então $L < nA$ ou ϕ é totalmente geodésica.*

Demonstração. Seja $p \in M$ tal que $\phi(p) = 0$. Como $\partial M \subset \partial B$, então p pertence ao interior de M. Suponha que $L \geq nA$. Como u se anula no interior de M, então pelo Teorema 2.3 segue que ϕ é totalmente geodésica. Agora suponha que ϕ não é totalmente geodésica e que $L \geq nA$, então novamente pelo Teorema (2.3) temos que $u \neq 0$ para todo $p \in int(M)$, que é uma contradição, pois $u(p) = 0$ com $p \in int(M)$. $\square$

Se $H \neq 0$, fixe uma orientação de M de modo que $H > 0$. Nesse caso, se M é mergulhada, seja B_1 a componente conexa de $B \backslash M$ para a qual a normal N aponta.

Corolário 2.5. *Suponha que B é a bola unitária e que ϕ é mergulhada estacionária estável. Se $H \neq 0$ e $0 \in B_1$, então $L < nA$.*

Demonstração. Suponha que $L \geq nA$, então u nunca se anula em $int(M)$ já que $H \neq 0$. Fixe uma orientação para M de modo que $H > 0$. Como $0 \in B_1$, seja $p_0 \in M$ tal que $u(p_0) \leq u(p)$ para todo $p \in M$. Neste caso, a direção normal a M em p_0 é dada pelo vetor posição. Mas como N aponta para B_1, segue que $u(p_0) < 0$, que é uma contradição. $\square$

Capítulo 3

Superfícies Estáveis na Bola Unitária

O resultado de Ros-Vergasta [19] não deixa claro se o item (iii) do Teorema (3.4) pode ocorrer ou não. De fato, eles afirmam não conhecerem exemplos de superfícies estáveis de gênero 1 e deixam a entender que não possuem pistas para acreditar na existência ou não. O objetivo deste capítulo é mostrar o resultado de I. Nunes [16] que fecha esta questão, mostrando que tal superfície estável não existe.

3.1 Demonstração do Teorema de Ros-Vergasta

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Ros-Vergasta. Precisaremos dos seguintes resultados preliminares.

Definição 3.1. *Seja f uma função de Classe C^∞ e suponha que f é solução de uma equação elíptica em M. O conjunto $f^{-1}(0)$ é chamado de conjunto nodal. Se a dimensão de M é dois e f não é identicamente nula, então podemos escrever $f^{-1}(0) = \bigcup C_i$ tais que C_i é conexo e $\nabla f(p) \neq 0$ para todo p no interior de C_i. Cada C_i é chamado de linha nodal.*

Teorema 3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana sem fronteira (não necessariamente compacta). Se $f \in C^\infty(M)$ satisfaz a equação*

$$\Delta_g f + hf = 0,$$

onde $h \in C^\infty(M)$, então exceto por um conjunto fechado de dimensão menor que $n-1$, o conjunto nodal de f é uma variedade diferenciável de dimensão $n-1$.

Teorema 3.2. *Suponha que M é uma variedade 2-dimensional. Se f é uma solução da equação*

$$\Delta f(p) + h(p)f(p) = 0$$

com $h \in C^\infty(M)$, então vale as seguintes afirmações:

i) Os pontos críticos de f no conjunto nodal são isolados.

ii) Quando as linhas nodais se encontram, formam um sistema equiangular.

iii) As linhas nodais são subvariedades unidimensionais fechadas de classe C^2.

iv) No ponto de encontro das linhas nodais as curvaturas geodésicas são iguais a zero.

Nosso objetivo não é demonstrar o teorema acima, para mais detalhes sobre este as definições e os resultados acima, ver [5].

Teorema 3.3 (Nitsche, [14])**.** *As únicas superfícies Σ orientáveis estacionárias na bola B com $\chi(\Sigma) = 1$ e uma componente conexa na fronteira são os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas ortogonais à fronteira ∂B.*

Teorema 3.4 (Ros-Vergasta, [19])**.** *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola unitária e $\phi : M \longrightarrow B$ é estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

i) $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico,

ii) $\phi(M)$ é uma calota esférica,

iii) $g = 1$ e $r = 1$ ou 2.

Demonstração. Note que $\Pi^{\partial B}(N, N) = 1$. Como $n = 2$, segue da condição (ii) do Lema (2.3) que a curvatura geodésica de ∂M em M é constante igual a 1. Assim, usando (2.11) e (2.12) podemos melhorar a estimativa (2.13) da seguinte maneira

$$4\pi\left(4 - 2g + 2\left[\frac{g+1}{2}\right] - r\right) > 4H^2A + 3L \geq 3(H^2A + L). \tag{3.1}$$

De (2.14) temos que $H^2 + L \geqslant 2\pi$, o que implica que

$$4\pi\left(4 - 2g + 2\left[\frac{g+1}{2}\right] - r\right) > 6\pi.$$

Daí

$$8 + 4\left[\frac{g+1}{2}\right] - 4g - 2r > 3.$$

Agora faremos a mesma análise feita no Teorema 2.1, quando o gênero g for par, e quando for ímpar.

Caso (i) Se g for par então $2\left[\frac{g+1}{2}\right] = g$. Assim

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 5 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Com isso temos que se $g = 0$ então $r = 1$ ou 2 e se $g = 2$, implica que $r = 0$.

Caso (ii) Se g for ímpar então $2\left[\frac{g+1}{2}\right] = g + 1$. Assim

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g + 2 - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 7 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Como g só pode ser igual a 1, segue que $r = 1$ ou 2.

Portanto temos que $g = 0$ ou 1 e $r = 1$ ou 2.

Vamos supor agora que ∂M não é mergulhada e vamos chegar a uma contradição. De (2.15) temos que $H^2 A + L \geqslant 4\pi$, usando em (3.1), ficamos com

$$4\pi\left(4 - 2g + 2\left[\frac{g+1}{2}\right] - r\right) > 3(4\pi),$$

ou seja,

$$4 - 2g + 2\left[\frac{g+1}{2}\right] - r > 3.$$

Novamente estudaremos o caso em que g é par e o caso em que g é ímpar.

Caso (i) Se g for par então $2\left[\frac{g+1}{2}\right] = g$. Assim

$$\begin{aligned} 3 &< 4 - 2g + g - r \\ \Leftrightarrow 1 &> g + r. \end{aligned}$$

Isso nos diz que $g = 0$ e $r = 0$ o que não pode ocorrer, já que ∂M é não vazia.

Caso (ii) Se g for ímpar então $2\left[\dfrac{g+1}{2}\right] = g+1$. Assim

$$\begin{aligned} 3 &< 4-2g+g+1-r \\ \Leftrightarrow 2 &> g+r. \end{aligned}$$

Daí temos que $g=1$ e $r=0$ o que não pode ocorrer, já que ∂M é não vazia.

Agora provaremos que os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas são as únicas superfícies estáveis com gênero $g=0$. Para isso considere um ponto $p_0 \in M$ tal que a função $\|\phi(p)\|$ atinja o mínimo. Lembre que $u \not\equiv 0$ implica que $0 \notin \phi(M)$. Defina a função

$$\beta(p) = \langle \phi(p) \times N(p), N_0 \rangle \,,$$

onde $N_0 = N(p_0)$ e $\times$ denota o produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. Note que

$$\beta(p_0) = \langle \phi(p_0) \times N_0, N_0 \rangle = 0. \tag{3.2}$$

Além disso,

$$\nabla_v \beta(p_0) = \langle v \times N(p_0) + \phi(p_0) \times \nabla_v N(p_0), N(p_0) \rangle = 0, \; \forall v \in T_pM,$$

já que $\phi(p_0) \neq 0$ implica que $\phi(p_0)$ é paralelo a $N(p_0)$. Logo,

$$\nabla \beta(p_0) = 0. \tag{3.3}$$

Pela Proposição 1.7 temos que

$$\begin{cases} \Delta\beta + \|\sigma\|^2\beta = 0, & \text{se } p \in M, \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial \nu} = \beta, & \text{se } p \in \partial M \end{cases} . \tag{3.4}$$

Logo, pela Definição 3.1, segue que $\beta^{-1}(0)$ é um conjunto nodal.

Afirmação: $\beta \equiv 0$.

Suponha que $\beta \not\equiv 0$. Assim o conjunto nodal $\beta^{-1}(0)$ seria um conjunto de curvas possuindo um conjunto de pontos críticos isolados de β (Teorema 3.2). Seja m o número de componentes conexa M_i de $M \backslash \beta^{-1}(0)$. Usando o Teorema de Gauss-Bonnet para cada componente conexa, temos que

$$\int_{M_i} K dM = 2\pi\chi(M_i) - \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_j \theta_{ij},$$

onde θ_{ij} denota os ângulos externos de cada componente M_i. Somando em i, obtemos que

$$\int_M KdM = 2\pi \sum_{i=1}^{m} \chi(M_i) - \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j} \theta_{ij}.$$

Assim

$$\int_M KdM + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \sum_{i=1}^{m} \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij} \tag{3.5}$$

Agora usaremos o Teorema de Gauss-Bonnet em M para obter uma outra equação e comparar com (3.5). Como ∂M é suave não temos ângulos externos, daí

$$\int_M KdM + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M). \tag{3.6}$$

Com isso, comparando a equação acima com equação (3.5) e usando o fato que $\chi(M) = 2 - 2g - r$, obtemos que

$$2\pi(2 - 2g - r) = 2\pi \sum_{i=1}^{m} \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij}. \tag{3.7}$$

Vamos obter uma estimativa para $\sum_{i,j} \theta_{ij}$. Por (3.2), (3.3) e os Teoremas 3.1 e 3.2, temos que existe pelo menos duas linhas nodais de $\beta^{-1}(0)$ intersectando em p_0 e formando um sistema equiangular em p_0. Para aplicar o Teorema 3.1 basta fechar M de alguma maneira para obter uma superfície sem fronteira. Daí, $\sum_{i,j} \theta_{ij}$ é pelo menos 2π que a soma dos ângulo que possuem $p_0 \notin \partial M$ como vértice. Por outro lado, para cada componente conexa Γ_k de ∂M, com $k = 1, ..., r$, podemos escolher uma curva γ_k orientada positivamente parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\phi \times N = -\gamma_k'$. Aqui estamos usando o fato que M é de fronteira livre. Daí, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\Gamma_k} \beta ds = -\int_{\Gamma_k} \langle \gamma_k', N_0 \rangle = 0,$$

já que γ_k é uma curva fechada. Segue que β tem pelo menos dois zeros em cada componente conexa Γ_k. Cada ponto de $\beta^{-1}(0) \cap \gamma_k$ contribui com pelo menos π para a soma de $\sum_{i,j} \theta_{ij}$. Assim, levando em consideração todos esses valores e o anterior obtido em p_0, obtemos a seguinte estimativa

$$\sum_{i,j} \theta_{ij} \geqslant 2\pi(1 + r).$$

Daí, comparando com a equação (3.7), temos

$$2\pi(2-2g-r) = 2\pi\sum_{i=1}^{m}\chi(M_i) - \sum_{i=1}^{m}\theta_i \leq 2\pi\sum_{i=1}^{m}\chi(M_i) - 2\pi(1+r)$$

o que implica que

$$2-2g-r \leq \sum_{i=1}^{m}\chi(M_i) - 1 - r,$$

ou seja,

$$3-2g \leq \sum_{i=1}^{m}\chi(M_i).$$

Como cada componente conexa M_i é homeomorfa a um disco, temos que a característica de Euler $\chi(M_i) = 1$ para cada i, daí, se supormos que o gênero $g = 0$, segue da expressão acima que $M \setminus \beta^{-1}(0)$ tem pelo menos três componentes conexas. Sejam M_1 e M_2 duas destas componentes conexas. Assim, sejam $\beta_1, \beta_2 : M \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\beta_1(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } p \in M_1 \\ 0, & \text{se } p \in M\backslash M_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_2(p) = \begin{cases} \beta(p), & \text{se } p \in M_2 \\ 0, & \text{se } p \in M\backslash M_2 \end{cases}$$

Lembre-se que $\Pi^{\partial B}(N,N) = 1$. Usando o Teorema da Divergência na definição da forma do índice para a função β_1, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\beta_1,\beta_1) &= \int_M \left(\langle\nabla\beta_1,\nabla\beta_1\rangle - ||\sigma||^2\beta_1^2\right) dM - \int_{\partial M}\beta_1^2 ds \\
&= \int_M \left(\langle\nabla\beta,\nabla\beta_1\rangle - ||\sigma||^2\beta_1\beta\right) dM - \int_{\partial M}\beta_1\beta ds \\
&= -\int_M \left(\beta_1\Delta\beta + ||\sigma||^2\beta_1\beta\right) dM + \int_M \left(\beta_1\frac{\partial\beta}{\partial\nu} - \beta_1\beta\right) ds \\
&= -\int_M \beta_1\left(\Delta\beta - ||\sigma||^2\beta\right) ds + \int_{\partial M}\beta_1\left(\frac{\partial\beta}{\partial\nu} - \beta\right) ds,
\end{aligned}$$

já que β_1 se anula em $M\backslash M_1$. De (3.4) segue que

$$\mathcal{I}(\beta_1,\beta_1) = 0$$

De forma análoga mostra-se que $\mathcal{I}(\beta_2,\beta_2) = 0$. Além disso, como β_1 e β_2 se anulam em conjuntos complementares, segue que $\mathcal{I}(\beta_1,\beta_2) = 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\displaystyle\int_M \beta_2 dM \neq 0$. Considere $\overline{\beta} = \beta_1 + a\beta_2$, onde $a = -\dfrac{\int_M \beta_1 dM}{\int_M \beta_2 dM}$. Além disso, pelo que foi feito acima, temos que

$$\mathcal{I}(\overline{\beta}, \overline{\beta}) = \mathcal{I}(\beta_1, \beta_1) + 2a\mathcal{I}(\beta_1, \beta_2) + a^2\mathcal{I}(\beta_2, \beta_2) = 0.$$

Como ϕ é estacionária estável, segue do Lema (2.1) que $\overline{\beta}N$ é um campo de Jacobi e portanto

$$\Delta\overline{\beta} + \|\sigma\|^2\overline{\beta} = constante. \tag{3.8}$$

Como $\overline{\beta}$ se anula no complementar de $M_1 \bigcup M_2$ e (3.8) é uma equação elíptica, segue do Teorema da Continuação Única para equações elípticas que $\overline{\beta} \equiv 0$ (ver [15]). Consequentemente, $\beta \equiv 0$. Assim,

$$0 = \langle \phi(p) \times N(p), N_0 \rangle = -\langle \phi(p) \times N_0, N(p) \rangle.$$

Logo, o vetor $V(p) = \phi(p) \times N_0 \in T_pM$, para todo $p \in M$.

Considere o campo de vetores W em $\mathbb{R}^3$ dado por $W(x) = x \times N_0$. W é um campo de Killing, ou seja, é gerado a partir de um grupo a um parâmetro de isometrias de $\mathbb{R}^3$. Neste caso, tais isometrias são rotações. Como a restrição de W coincide com V ao longo de $\phi(M)$, segue que M é uma superfície de rotação em torno do eixo N_0 com ponto fixo p_0, o que implica que M é homeomorfa ao disco. O resultado segue do Teorema de Nitsche, Teorema 3.3. □

Corolário 3.5. *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ a bola unitária. Se ϕ é estacionária estável com $L \geq 2A$, então $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica.*

A demonstração segue diretamente dos Teoremas 2.3 e 3.4, já que superfícies estreladas devem ter gênero igual a zero.

3.2 Demonstração do Teorema de I. Nunes

Inicialmente vamos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio compacto e convexo. Se $\phi : M \to \Omega$ é uma imersão estável CMC com fronteira live, então*

$$\mathcal{I}(f, f) = \int_M \left(\|\nabla f\|^2 - \|\sigma\|^2 f^2\right) dM \geq 0 \tag{3.9}$$

para toda função $f \in C^\infty(M)$ tal que $f = 0$ em ∂M.

Demonstração. Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Defina as funções $N_i(p) =$

$\langle e_i, N(p)\rangle$ para $i = 1, 2, 3$ onde $p \in \phi(M)$. Sabemos de (1.13) que

$$\Delta N_i + \|\sigma\|^2 N_i = 0. \tag{3.10}$$

Do Lema 2.2, temos que $\int_M N_i dM \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Daí, como Ω é um domínio convexo, segue que $\Pi^{\partial\Omega}(N, N) > 0$. De forma análoga a (2.8) obtemos que

$$\sum_{i=1}^{3} \mathcal{I}(N_i, N_i) = -\int_{\partial M} \Pi^{\partial\Omega}(N, N) ds < 0. \tag{3.11}$$

Portanto, existe pelo menos um $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\mathcal{I}(N_{i_0}, N_{i_0}) < 0$.

Seja $f \in C^\infty(M)$ tal que $f = 0$ em ∂M. Depois de multiplicar f por uma constante, podemos supor que $\int_M f dM = \int_M N_{i_0}$dM. Note que $f - N_{i_0} \neq 0$, já que $\mathcal{I}(N_{i_0}, N_{i_0}) < 0$ e $f = 0$ em ∂M, caso contrário teríamos diretamente que $\mathcal{I}(N_{i_0}, N_{i_0}) = 0$. Desta forma, temos que $f - N_{i_0} \in \mathcal{F}$ e da condição de estabilidade de ϕ sabemos que $\mathcal{I}(f - N_{i_0}, f - N_{i_0}) \geq 0$. Assim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{I}(f - N_{i_0}, f - N_{i_0}) \\ &= \mathcal{I}(f, f) - 2\mathcal{I}(f, N_{i_0}) + \mathcal{I}(N_{i_0}, N_{i_0}). \end{aligned}$$

Como $f = 0$ em ∂M e $\Delta N_{i_0} + \|\sigma\|^2 N_{i_0} = 0$, temos que $\mathcal{I}(f, N_{i_0}) = 0$. Além disso, $\mathcal{I}(N_{i_0}, N_{i_0}) < 0$, segue que

$$\mathcal{I}(f, f) > 0.$$

Isso finaliza a demonstração. □

Para a demonstração do resultado principal deste capítulo, será necessário a seguinte proposição cuja prova pode ser obtida em [20].

Proposição 3.2 (Corolário 5.8, [20]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio convexo tal que a segunda forma fundamentla de $\partial\Omega$ satisfaz a condição $\Pi^{\partial\Omega} \leq k$. Então*

$$2\pi \leq \frac{1}{4}\int_M H^2 dM + kL.$$

Além disso, vale a igualde se, e somente se $\phi(M)$ é uma calota esférica ou um disco unitário totalmente geodésico.

Teorema 3.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio convexo, compacto e suave. Suponha que a segunda forma* *fundamental $\Pi^{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega$ satisfaz a condição*

$$kh \leq \Pi^{\partial\Omega} \leq \left(\frac{3}{2}\right) kh, \tag{3.12}$$

para alguma constante $k > 0$, onde h é a métrica induzida em $\partial\Omega$. Se $\phi : M \to \Omega$ é uma imersão orientada compacta estacionária estável com fronteira livre, então M tem gênero zero e a fronteira tem no máximo duas componentes conexas.

Demonstração. Por um resultado de A. Gabard [8], temos que existe uma aplicação conforme $\psi : M \to \mathbb{D}^2$ de grau no máximo $g + r$, onde $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco fechado unitário. Desde que $\mathbb{D}^2$ é conformemente equivalente ao hemisfério $\mathbb{S}^2_+ \subset \mathbb{R}^3$, podemos supor que $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : M \to \mathbb{S}^2_+$. Além disso, a energia de Dirichlet é menor do que $4\pi(g + r)$, isto é,

$$\int_M \|\nabla\psi\|^2 dM \leq 4\pi(g + r). \tag{3.13}$$

Usando um difeomorfismo conforme de $\mathbb{S}^2_+$, podemos supor que

$$\int_M \psi_i dM = 0,$$

para $i = 1, 2$. Como imersão $\phi : M \to \Omega$ é estável, temos que $\mathcal{I}(\psi_i, \psi_i) \geq 0$, para $i = 1, 2$. Daí

$$\int_M \left(\|\nabla_g\psi_i\|^2 - \|\sigma\|^2\psi_i^2\right) dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N)\psi_i^2 ds \geq 0. \tag{3.14}$$

Note que $\psi_3|_{\partial M} = 0$, já que $\psi(\partial M) = \partial\mathbb{S}^2_+$. De (3.14), obtemos que

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N)ds + \sum_{i=1}^{2} \int_M \|\sigma\|^2\psi_i^2 dM \leq \sum_{i=1}^{2} \int_M \|\nabla\psi_i\|^2 dM.$$

Da Proposição 3.1 tem-se que

$$\int_M \|\sigma\|^2\psi_3^2 dM \leq \int_M \|\nabla\psi_3\|^2 dM.$$

Portanto

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N)ds + \int_M \|\sigma\|^2 dM \leq \int_M \|\nabla\psi\|^2 dM \tag{3.15}$$

Como $\|\sigma\|^2 = H^2 - K$, então

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M (H^2 - 2K)dM \leqslant \int_M \|\nabla\psi\|^2 dM. \tag{3.16}$$

Agora, usando o Teorema de Gauss-Bonnet, (3.13) e (3.16), obtemos que

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M H^2 dM + 2\int_{\partial M} k_g ds - 4\pi\chi(M) \leqslant 4\pi(2+g),$$

o que implica que

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M H^2 dM + 2\int_{\partial M} k_g ds \leqslant 4\pi(2-2g-r) + 4\pi(g+r). \tag{3.17}$$

Logo

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M H^2 dM + 2\int_{\partial M} k_g ds \leqslant 4\pi(2-g). \tag{3.18}$$

Considerando uma curva $\gamma : I \to \partial M$ orientada positivamente tal que $k_g = \langle \gamma'', \eta \times \gamma' \rangle = \langle \gamma'', -N \rangle = \Pi^{\partial B}(\gamma', \gamma') \geqslant k$, onde η é a normal a ∂M apontando para dentro. Daí, substituindo em (3.18), obtemos da condição (3.12) que

$$4\pi(2-g) \geqslant \int_M H^2 ds + 3\int_{\partial M} k ds = \int_M H^2 dM + 3kL,$$

que podemos escrever como

$$4\pi(2-g) \geqslant \frac{1}{2}\int_M H^2 dM + 2\left(\frac{1}{4}\int_M H^2 dM + \frac{3}{2}kL\right). \tag{3.19}$$

Como $\Pi^{\partial B} \leqslant \frac{3}{2}kh$, segue da Proposição 3.2 que

$$\frac{1}{4}\int_M H^2 dM + \frac{3}{2}kL \geqslant 2\pi, \tag{3.20}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica, caso em que a demonstração estaria completa.

Suponha que a ocorre a desigualdade em (3.20). Daí juntamente com (3.19), implica que $4\pi(2-g) > 4\pi$, ou seja, $g < 1$. Daí, M tem gênero 0. Agora considere a aplicação conforme $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : M \to \mathbb{S}^2$, que é a restrição da aplicação dada pela afirmação na demonstração do Teorema 2.1. Nesse caso temos que

$$\int_M \varphi_i dM = 0,$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Além disso,

$$E = \int_M \|\nabla\varphi\|^2 dM \leq 8\pi \left(1 + \left[\frac{g+1}{2}\right]\right) \tag{3.21}$$

De forma análoga ao obtido em (3.17), obtemos que

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M H^2 dM + 2\int_{\partial M} k_g ds \leqslant 4\pi(2 - 2g - r) + \int_M \|\nabla\varphi\|^2 dM.$$

Daí, como $g = 0$, temos

$$\int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N,N)ds + \int_M H^2 dM + 2\int_{\partial M} k_g ds \quad \leqslant \quad 4\pi(2-r) + 8\pi = 16\pi - 4\pi r$$

Agora, usando os mesmo argumentos para chegar ne desigualdade (3.19), obtemos que

$$16\pi - 4\pi r \geqslant \frac{1}{2}\int_M H^2 dM + 2\left(\frac{1}{4}\int_M H^2 dM + \frac{3}{2}kL(\partial M)\right).$$

De (3.20) obtemos que

$$16\pi - 4\pi r > 4\pi \;\Rightarrow r < 3$$

$\square$

Portanto M tem gênero 0 e no máximo duas componentes conexas. Diante deste resultado, temos que se $\phi : M \longrightarrow B$ é uma imersão orientada e compacta estacionária estável com curvatura média constante , então ϕ tem gênero zero.

3.3 Resultado Principal

Como consequência dos Teoremas 3.4 e 3.6, obtemos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3.7. *[Ros-Vergasta [19], Nunes [16]] Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola unitária e $\phi : M \longrightarrow B$ é estacionária estável. Então ∂M é mergulhada e as únicas possibilidades são*

i) $\phi(M)$ é um disco totalmente geodésico,

ii) $\phi(M)$ é uma calota esférica,

Referências Bibliográficas

[1] J. L. Barbosa, M. do Carmo e J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, Math. Z. **197** (1988), no. 1, 123–138.

[2] J. L. Barbosa e M. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, Math. Z. **185** (1984), no. 3, 339–353.

[3] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2010.

[4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, 10, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[5] S. Y. Cheng, Eigenfunctions and nodal sets, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 1, 43–55.

[6] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, A course in minimal surfaces. American Mathematical Soc. 2011.

[7] A. Colette. *Bornes sur la multiplieité*, Preprint, 1992.

[8] A. Gabard, Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes, Comment. Math. Helv. **81** (2006), no. 4, 945–964.

[9] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[10] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 202, Springer-Verlag, New York, 2000.

[11] J. M. Lee, *Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 176, Springer-Verlag, New York, 1997.

[12] P. Li e S. T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 269–291.

[13] R. López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2013.

[14] J. C. C. Nitsche, Stationary partitioning of convex bodies, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), no. 1, 1–19.

[15] A. Nachman, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. Kansas Univ Lawrence, 1956.

[16] I. Nunes, On stable constant mean curvature surfaces with free boundary, Math. Z. **287** (2017), no. 1-2, 473–479.

[17] M. H. Protter e H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, corrected reprint of the 1967 original, Springer-Verlag, New York, 1984.

[18] P. Pucci e J. Serrin, *The maximum principle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 73, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[19] A. Ros e E. Vergasta, Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, 19–33.

[20] A. Volkmann, A monotonicity formula for free boundary surfaces with respect to the unit ball, Comm. Anal. Geom. **24** (2016), no. 1, 195–221.

[21] G. Wang e C. Xia, *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball.* ArXiv: 1708.06861v1.